ПОСТУПАЮЩИМ В МАГИСТРАТУРУ

**Т.С. Полякова, И.А. Бреус, Л.Е. Князева,
И.А. Михайлова, В.Е. Пырков**

МАГИСТЕРСКАЯ ПРОГРАММА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

***НАПРАВЛЕНИЕ:
ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ***

Ростов-на-Дону
2015

УДК 510
ББК 22.1
П49

П49 **Полякова, Т.С.**
Магистерская программа «Математическое образование»: учебное пособие /Т.С.Полякова, И.А. Бреус, Л.Е. Князева, И.А. Михайлова, В.Е. Пырков ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. – 122 с.
ISBN 978-5-9275-1544-8

В учебном пособии представлена краткая программа вступительных экзаменов в магистратуру по программе «Математическое образование» и материалы для подготовки к сдаче той части экзамена, которая посвящена теории и методике математического образования.

Пособие будет полезно не только поступающим в магистратуру, но и студентам бакалавриата, осваивающим учебную дисциплину «Теория и методика математического образования».

Пособие разработано для абитуриентов, поступающих в магистратуру для обучения по магистерским программам “ITinEngineering” (“ITinBiomechanics”, “ITinElectricalEngineering”, “ITinSystemsEngineering”, “ITinSoftwareEngineering”) в рамках выполнения проекта «Интернационализация учебных планов на уровне магистра в российских вузах Южного региона» программы Tempus-IV.

Публикуется в авторской редакции.

ISBN 978-5-9275-1544-8

УДК 510
ББК 22.1

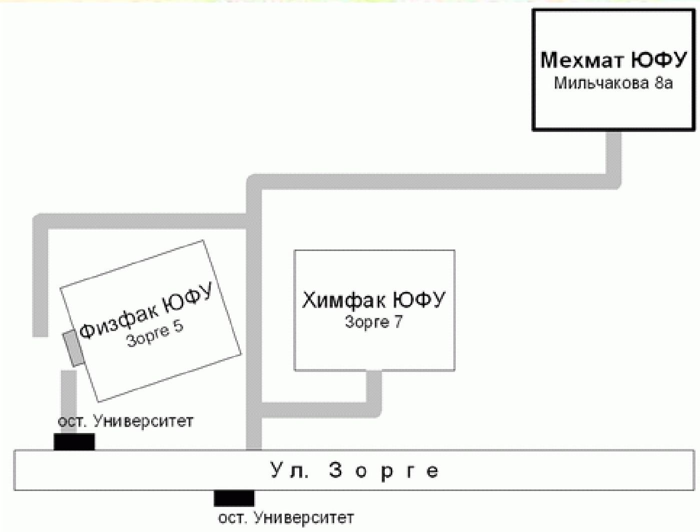
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК им. И.И. ВОРОВИЧА

кафедра теории и методики математического образования

п р и г л а ш а ю т

поступить в магистратуру по программе «Математическое образование»



КОГО:

- ✓ **выпускников бакалавриата и специалитета педагогических, технических и классических университетов, педагогических и технических институтов;**
- ✓ **учителей математики, работающих в школе, но не имеющих педагогического образования;**
- ✓ **учителей, имеющих педагогическое образование, но желающих получить дополнительную квалификацию учителя математики;**
- ✓ **преподавателей математики средних специальных и высших учебных заведений, желающих повысить свою квалификацию.**

ЦЕЛЬ: **подготовка преподавателей-исследователей, обладающих необходимыми компетенциями для реализации современного математического образования на всех его уровнях, включая среднее специальное и высшее.**

Преимущества обучения по программе «Математическое образование»

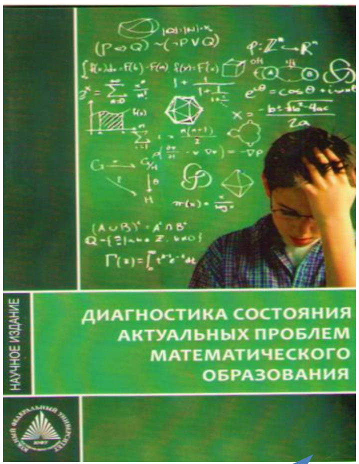
- ✓ **возрастные ограничения отсутствуют,**
- ✓ **бюджетные места,**
- ✓ **серьезные преимущества при аттестации, получении категории, формировании портфолио и др.**

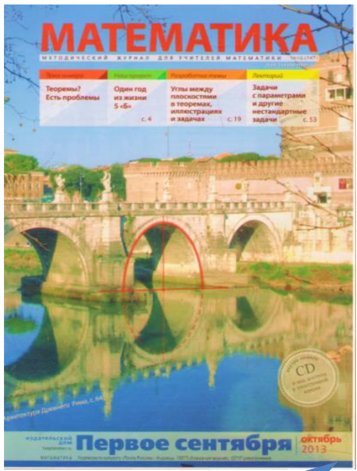
Форма обучения – заочная

Срок обучения – 2,5 года: 2-3 сессии в год длятся в общей сложности 40 дней (10+15+15 в 1-м году обучения, 20+20 во 2-м году обучения, 10+10 последние полгода)

Поступление – заявление (19 июня – 31 июля), экзамен по математике с теорией и методикой обучения математике (август)

В процессе обучения возможны публикации под руководством научного руководителя, участие в научных конференциях и т.д.





Коллективная монография кафедры с участием магистров 2013-2015 гг. выпуска

Сборник материалов Международной студенческой конференции со статьями магистров 2015 г. выпуска

Популярный журнал для учителей «Математика», в котором опубликована статья магистра 2013 г. выпуска

Вручение Диплома I степени в Парадном зале Казанского университета магистрам 2015 г. выпуска

Где:г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки 200/1, к. 312, кафедра теории и методики математического образования.

Контакты:

Зав.кабинетом	Ольга Сергеевна Ткаченко	(8918)5243864 kafedrampm_rgpu@mail.ru
Зав. кафедрой теории и методики математического образования	Лариса Евгеньевна Князева	(8906)4170915 leknyazeva@sfedu.ru

Руководитель магистерской программы – доктор педагогических наук, профессор, Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации
Татьяна Сергеевна Полякова
(8928)6207621
46tsp@mail.ru

ПРЕДИСЛОВИЕ

Магистерская программа «Математическое образование» реализуется на базе кафедры теории и методики математического образования Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, имеющей длительный позитивный опыт подготовки преподавателей математики в магистратуре.

В настоящее время существенно расширился круг лиц, заинтересованных в получении магистерской подготовки по программе «Математическое образование» направления «Педагогическое образование», которая нацелена на подготовку преподавателя-исследователя в области математического образования и дает возможности для существенного карьерного роста на всех его ступенях. В связи с этим кафедрой предприняты значительные усилия по популяризации программы «Математическое образование», разработано новое содержание вступительного экзамена, адаптированное к поступлению в магистратуру лиц с разнообразной подготовкой по математике и теории и методике математического образования. Предлагаемое Вашему вниманию учебное пособие представляет это новое содержание.

Первая часть пособия включает в себя краткую программу вступительного экзамена по математике с теорией и методикой математического образования. В ней представлено лаконичное содержание каждого вопроса вступительного экзамена по алгебре и теории чисел (раздел 1), математическому анализу (раздел 2), геометрии (раздел 3) и теории и методике математического образования (раздел 4). Разделы заканчиваются кратким перечнем литературы с указанием электронного адреса каждого литературного источника.

Электронные адреса литературных источников последнего раздела «Теория и методика математического образования» отсутствуют в силу того, что качественного учебника по этой дисциплине кафедра рекомендовать не может. Поэтому сотрудники кафедры подготовили материалы по каждому из 20 вопросов вступительных экзаменов по теории и методике математического образования, которые и составляют содержание второго раздела учебного пособия. Эти материалы достаточны для успешной сдачи той части вступительного экзамена, которая касается теории и методики математического образования.

Кафедра теории и методики математического образования Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ желает Вам успешного поступления в магистратуру по программе «Математическое образование»!

Руководитель магистерской программы
Т.С. Полякова

1. КРАТКАЯ ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВВ МАГИСТРАТУРУ ПО ПРОГРАММЕ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ»[1]

Раздел 1. Алгебра и теория чисел

1. *Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа*. Представление комплексного числа в алгебраической и тригонометрической формах, связь между ними. Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел, заданных в алгебраической форме. Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.
2. *Формулы Муавра и извлечения корня натуральной степени из комплексного числа*. Возведение комплексного числа в натуральную степень. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа. Группа корней n-й степени из единицы
3. *Делимость в кольце целых чисел*. Отношение делимости в кольце целых чисел. Свойства отношения делимости: рефлексивность, транзитивность, сохранение знаков делимого и делителя, делимость суммы и произведения, делимость нуля, невозможность деления на нуль, сравнение делимого и делителя.
4. *Простые и составные числа*. Свойства простых чисел. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики. Каноническое представление целого числа.
5. *Сравнения в кольце целых чисел*. Отношение сравнимости по модулю в кольце целых чисел: рефлексивность, транзитивность, симметричность. Простейшие свойства сравнений, зависящих и не зависящих от модуля. Арифметические операции над сравнениями.
6. *Линейное векторное пространство над данным полем*. Определение линейного пространства. Примеры линейных пространств. Арифметическое n-мерное пространство. Линейная зависимость векторов. Свойства линейно зависимых систем векторов. Базис и размерность линейного пространства.

[1] В разработке программы принимали участие доценты кафедры теории и методики математического образования А.Н. Друзь, И.Ю. Жмурова, Л.Е. Князева, проф. Т.С. Полякова.

7. *Системы линейных алгебраически уравнений*. Виды систем линейных алгебраических уравнений. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений: метод Гаусса, матричный метод, метод Крамера.
8. *Кольцо многочленов одной переменной*. Определение многочлена. Стандартный вид многочлена. Сложение и умножение многочленов. Корни многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера.
9. *Многочлены над полем комплексных чисел*. Основная теорема алгебры и следствия из нее. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Формулы Виета.
10. *Многочлены над полем рациональных чисел*. Теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами. Следствие. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры – М.: Лань, 2013.
   URL: http://bookfi.org/book/629677
2. Виноградов И.М. Основы теории чисел – М.: Лань, 2009.
   URL:http://ilib.mccme.ru/djvu/vinogradov.htm
3. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Издательский центр «Академия», 2010.
   URL: http://mexalib.com/view/10345
4. Бухштаб А.А. Теория чисел – М.: М.: Лань, 2008.
   URL: http://mexalib.com/view/10256
5. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. – М.: Вузовская книга, 2000.
   URL: http://mexalib.com/view/33188

Раздел 2. Математический анализ

1. *Предел функции* Определения предела функции по Коши и по Гейне, их эквивалентность. Свойства функций, имеющих предельное значение: ограниченность, сохранение знака, переход к пределу в неравенстве, переход к пределу в сумме, произведении, частном сходящихся функций (доказать одну из теорем). Замечательные пределы.
2. *Непрерывность функции* Определение непрерывной функции. Свойства функций, непрерывных на отрезке: теорема о прохождении функции через ноль при смене знаков, теорема о прохождении функции через любое промежуточное значение, первая теорема Вейерштрасса (с доказательством), вторая теорема Вейерштрасса.

3. *Производная функции* Определение производной функции. Геометрический смысл производной. Определение дифференцируемой функции. Теорема о связи дифференцируемости и существованием производной функции в точке. Правила дифференцирования.
4. *Основные теоремы дифференциального исчисления* Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши – формулировки, интерпретация, доказательство теоремы Коши.
5. *Интегрируемость по Риману* Определения интегральных сумм, функции, интегрируемой по Риману, сумм Дарбу. Критерий интегрируемости функции. Основные классы интегрируемых функций.
6. *Интеграл Римана как функция верхнего предела* Непрерывность и дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом (одна из теорем с доказательством). Основная теорема интегрального исчисления (формула Ньютона-Лейбница).
7. *Функциональные ряды* Определения функциональных последовательностей и рядов, равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: непрерывность суммы ряда, условия почленного интегрирования и дифференцирования ряда (одна из теорем с доказательством).
8. *Дифференцируемость функции многих переменных* Определение частных производных, частных дифференциалов, дифференцируемой в точке функции многих переменных, полного дифференциала функции многих переменных. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции многих переменных.
9. *Интегрируемость функции многих переменных* Определение и условия существование двойного интеграла для произвольной области. Основные свойства двойного интеграла (аддитивность, линейность, теорема о среднем значении). Вычисление двойного интеграла путем сведения его к повторному.
10. *Линейные дифференциальные уравнения* Линейное дифференциальное уравнение первого порядка: определение и методы интегрирования. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков: методы интегрирования и свойства решений.

Литература

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ: учебник: в 2 ч. - Изд. 3-е. – М.: Проспект, 2007.

URL: http://www.alleng.ru/d/math/math96.htm

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: в 2 ч. – М.: Наука, 1982.
   Часть 1: URL: http://nashol.com/2011062856886/osnovi-matematicheskogo-analiza-chast-1-ilin-v-a-poznyak-e-g.html
   Часть 2: URL: http://nashol.com/2011062756867/osnovi-matematicheskogo-analiza-chast-2-ilin-v-a-poznyak-e-g.html
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа – М.: Высшая школа, 1989.
   URL: http://www.alleng.ru/d/math/math99.htm
4. Тихонов А.Н., Васильев А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980.
   URL: http://mexalib.com/view/10657

Раздел 3. Геометрия

1. *Простейшие понятия аналитической геометрии.* Системы координат на плоскости и в пространстве (аффинная, прямоугольная, полярная). Координаты точки и вектора на плоскости и в пространстве. Деление отрезка в данном отношении. Вычисление расстояние между двумя точками. Уравнение окружности.
2. *Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.* Сложение векторов и его свойства. Умножение вектора на число и его свойства. Определение и свойства скалярного произведения векторов. Определение и свойства векторного произведения векторов. Определение и свойства смешанного произведения векторов. Вычисление скалярного, векторного, смешанного произведений векторов в прямоугольной системе координат. Геометрический смысл векторного и смешанного произведений векторов.
3. *Уравнение линии на плоскости и в пространстве. Уравнения прямой на плоскости и в пространстве.* Каноническое и общее уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через две точки плоскости и пространства. Параметрические уравнения прямой на плоскости и в пространстве.
4. *Уравнение поверхности. Уравнения плоскости.* Уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум неколлинеарным векторам. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки обще-

го положения. Параметрические уравнения плоскости. Общее уравнение плоскости. Нормальное уравнение плоскости.

5. *Взаимное расположение прямых и плоскостей.* Взаимное расположение прямых на плоскости. Взаимное расположение прямых в пространстве. Взаимное расположение двух плоскостей. Взаимное расположение прямой и плоскости.
6. *Метрические задачи аналитической геометрии на плоскости.* Вычисление расстояния от точки до прямой. Вычисление угла между прямыми. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых.
7. *Метрические задачи аналитической геометрии в пространстве*. Вычисление расстояний: от точки до прямой, от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми. Вычисление угла: между прямой и плоскостью, между плоскостями. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей.
8. *Линии второго порядка и их свойства*. Определение эллипса, гиперболы и параболы. Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы. Исследование формы эллипса, гиперболы и параболы по их каноническим уравнениям (на примере одной из них).
9. *Поверхности второго порядка и их свойства.* Эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды: определение и канонические уравнения. Исследование формы поверхности второго порядка по каноническому уравнению методом сечений (на примере конкретной поверхности).
10. *Аксиоматический метод построения научного знания. Требования к системе аксиом.* Логическая схема построения научной теории аксиоматическим методом. Непротиворечивость, независимость и полнота системы аксиом. Аксиоматика евклидовой геометрии (на примере одной из аксиоматик).

Литература

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч. 1. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов.— М.: Просвещение, 1986. URL: http://www.diary.ru/~eek/p165970944.htm
2. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч. 2. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов.— М.: Просвещение, 1987. URL: http://www.diary.ru/~eek/p165970944.htm
3. Баклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгеб-

ры. Учеб. для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
URL: http://padabum.com/d.php?id=43118
4. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – 7-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004
URL: http://padabum.com/d.php?id=29375

Раздел 4. Теория и методика математического образования

1. *Математическое образование.* Роль и место математического образования в современном обществе. Основные тенденции развития математического образования в России. Математическое образование в системе непрерывного образования.
2. *Предмет теории и методики математического образования.* Теория и методика математического образования как наука. Математика – наука и математика – учебный предмет. Взаимосвязи теории и методики математического образования с другими науками
3. *Цели математического образования*. Различные подходы к целеполаганию в обучении математике: традиционный, технологический, личностно-ориентированный. Требования ФГОС к постановке целей обучения математике.
4. *Содержание обучения математике.* Школьные математические дисциплины. Нормативные документы математического образования: стандарты, программы, учебники. Основные содержательно-методические линии обучения математике.
5. *Методы обучения математике.* Понятие метода обучения. Классификации методов обучения математике. Характеристика групп методов и отдельных методов. Примеры их использования в процессе обучения математике.
6. *Научные методы в обучении математике.* Индукция и дедукция в обучении математике: характеристика каждого научного метода, примеры использования в школьном математическом образовании.
7. *Научные методы в обучении математике.* Анализ и синтез в обучении математике: характеристика каждого научного метода, примеры использования в школьном математическом образовании.
8. *Научные методы в обучении математике.* Наблюдение и опыт в обучении математике. Обобщение и абстрагирование в обучении математике.
9. *Формы мышления в обучении математике.* Понятие. Математическое понятие. Содержание и объем понятия. Определение понятия. Виды

определений. Требования к определению. Методика формирования математических понятий.

10. *Формы мышления в обучении математике.* Суждения. Математические предложения. Аксиомы и теоремы. Структура и виды теорем. Умозаключения. Методика обучения доказательству теорем.
11. *Правила и алгоритмы в обучении математике.* Алгоритм. Свойства алгоритма. Развернутые и свернутые алгоритмы. Алгоритмы в школьном математическом образовании. Методика использования алгоритмов в процессе обучения математике.
12. *Задачи в обучении математике.* Понятие задачи, ее структура. Роль и функции задач в обучении математике. Классификации задач. Упражнения. Методика обучения решению математических задач.
13. *Организация обучения математике.* Урок как основная форма обучения математике. Структура урока математики. Типы уроков математики. Основные требования к уроку математики.
14. *Организация обучения математике.* Подготовка учителя к уроку математики. Организация самостоятельной работы на уроках математики. Анализ урока математики.
15. *Контроль качества обучения математике.* Виды и функции контроля. Оценка и отметка. Контрольная работа, анализ результатов. Методика проверки и оценки знаний, умений и навыков учащихся. Основной государственный экзамен. Единый государственный экзамен.
16. *Профилизация в обучении математике.* Уровневая и профильная дифференциация обучения. Предпрофильное обучение математике. Профильные школы и классы. Содержание обучения математике в профильных школах и классах.
17. *Дополнительное математическое образование.* Структура, цели и формы дополнительного математического образования школьников. Центры дополнительного математического образования. Олимпиады, математические конкурсы. Научно-исследовательская работа школьников.
18. *Внеклассная работа по математике.* Понятие внеклассной работы по математике как одного из видов дополнительного математического образования. Виды и формы внеклассной работы по математике. Характеристика одной из форм внеклассной работы по математике (на выбор).
19. *Средства обучения математике.* Печатные средства обучения математике и их электронные версии. Современные средства обучения матема-

тике. Технологическая схема планирования применения средств обучения на уроке математики.

20. *Педагогические технологии в обучении математике*. Подходы к определению, классификации. Характеристические особенности некоторых технологий. Примеры использования (на выбор).

Литература

1. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / Под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
2. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. педвузов и ун-тов. – М.: Просвещение, 2001. – 224 с.
3. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: Учеб. пособие. – Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 2009. – 732 с.
4. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.
5. Виноградова Л.Б. Методика преподавания математики в средней школе. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005. – 252 с.

2. МАТЕРИАЛЫ К РАЗДЕЛУ «ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ»

2.1. Математическое образование. Роль и место математического образования в современном обществе. Основные тенденции развития математического образования в России. Математическое образование в системе непрерывного образования.

Математическое образование – органическая часть системы общего образования, *содержательной основой* которой является математика как учебный предмет.

Под образованием мы понимаем синтез обучения, воспитания и развития. Тогда математическое образование – это синтез обучения математике, воспитания через особенности содержания и методов математики и развитие в процессе обучения математике. Охарактеризуем роль математического образования в процессах обучения, воспитания и развития.

Во-первых, значение обучения математике предопределено *ролью самой математики в современном мире*. В недавно принятой Правительством «Концепции развития математического образования в Российской Федерации» подчеркивается, что математика занимает особое место в науке, культуре, общественной жизни, являясь одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса.

Особое место математики в системе наук определяется универсальностью математических знаний, которая проявляется в проникновении ее методов, прежде всего, метода математического моделирования, в другие отрасли научного знания, как естественнонаучные (физика, химия, биология и т.п.), так и гуманитарные (экономика, лингвистика, психология и др.). Роль математического моделирования существенно возросла в современном обществе в связи с возможностями компьютерной обработки данных. Кроме того, математика является обязательным элементом общей культуры современного человека, который уверенно оперирует математическим понятиями в жизни, в быту. Например, привычны такие выражения, как «…растет в геометрической прогрессии», «…увеличилось на порядок» и др. Все это говорит о все возрастающей роли *обучения математике*.

Во-вторых, исключительная роль математического образования заключается в значительном *воспитательном потенциале математики* как учебного предмета. Прежде всего, несомненна роль математики в формировании *естественнонаучной картины мира*. Здесь важно показать, что в качестве источника развития математики выступает объективный мир. С другой стороны, абстрактные математические понятия находят все более широкое применение в практике. Так, например, комплексные числа используются в самолетостроении, ракетостроении и др. Для формирования естественнонаучной картины мира широко используются историко-математические сведения, с помощью которых можно показать влияние математики на развитие механики, физики, технических наук и обратное влияние возникающих в недрах этих наук задач на развитие математики.

Математика эффективно влияет на воспитание таких *моральных качеств* личности, как честность, настойчивость, целеустремленность, воспитание патриотизма. Приучая к доказательности, логичности в рассуждениях, воспитываем честность. Овладение математикой, решение математических задач воспитывают настойчивость и целеустремленность. Знакомство с достижениями отечественных математиков пробуждают гордость за российскую науку, в том числе, математику, занимавшую ведущие позиции в мире.

Математика как учебный предмет имеет большие возможности для *эстетического воспитания.* Они заключаются не только в связях математики с различными видами искусства – живописью, архитектурой, музыкой и др., но и красотой самой математики. Такие математические понятия, как симметрия, свойства правильных многогранников, золотое сечение и пр.

тесно связаны с красотой и гармонией мира. В обучении математике мы часто сталкивается с «красивой формулой», «красивой теоремой», «красивым доказательством», «красивым решением задачи». Подчеркивая красоту математических объектов, заключающуюся в их точности, краткости, совершенстве, мы вносим существенный вклад в эстетическое воспитание личности средствами математики.

В-третьих, математика играет существенную роль в *развитии мышления*. В процессе обучения математике обучающийся постоянно выполняет такие *мыслительные операции*, как анализ и синтез, индукция и дедукция, сравнение, обобщение и конкретизация. Но особенно велика роль математики в овладении такой мыслительной операцией, как операция *абстрагирования.* В первую очередь потому, что сама математика – наиболее абстрактная из наук, так как изучает не сами предметы и явления реального мира, а количественные отношения и пространственные формы, которые им присущи. Для их изучения необходимо абстрагироваться от всех других свойств и отношений, что можно сделать, выполнив операцию абстрагирования.

Кроме того, математика эффективно развивает такие *качества мышления*, как гибкость, экономичность, систематичность и последовательность мышления. Но все же наибольшую роль играет математика в формировании *доказательности и логичности*. Последовательно обучает доказательству только математика, в наибольшей степени – геометрия, а основа доказательности – логика как умение рассуждать последовательно и непротиворечиво. Только в геометрии развивается и пространственное мышление, которое совершенно необходимо в технике, архитектуре, искусстве.

Итак, математика играет *существенную роль в обучении, воспитании и развитии,* что и определяет ведущую роль математического образования в общей системе образования. Этим объясняется и особое *место математи-*

ческого образования. Математика изучается на протяжении всего обучения в общеобразовательной школе. В высшей школе ее углубленно изучают на математических и физических факультетах университетов и педагогических вузов, достаточно глубоко – в технических вузах. Отдельные математические дисциплины изучаются не только на естественнонаучных факультетах, но и на гуманитарных направлениях. Так, на факультетах психологии изучается целый комплект математических дисциплин, прежде всего – математическая статистика.

Тенденции развития математического образования тесно связаны с решением обострившихся в настоящее время проблем. В концепции развития математического образования в России выделены, прежде всего, проблемы *мотивационного* и *содержательного* характера.

Проблемы *мотивационного характера* во многом связаны с общественной недооценкой математического образования. Действительно, практически на протяжении второй половины прошлого века, математическое образование, наряду с естественнонаучным и техническим, рассматривалось как наиболее престижное, дающее хорошие возможности карьерного роста. В постсоветский период более престижными стали юридические, экономические специальности, некоторые сферы гуманитарного знания. Это негативно повлияло и на мотивацию к изучению математики в школе, изменение отношения к ее изучению. Уменьшилось число часов на изучение математики. Частично изменилась ситуация с введением обязательного ЕГЭ по математике. Однако решение этой проблемы следует искать на путях развития интереса к математике, ее популяризации, разнообразия форм как основного, так и дополнительного математического образования, его гуманитаризации и дифференциации. Использование приемов гуманитаризации математического образования может привлечь к математике обучающихся с гуманитарным или смешанным типом мышления. Дифференциация – отобрать одаренных в математике и помочь менее одаренным овладевать ею.

Проблемы *содержательного характера* заключаются в устаревании изучаемого математического материала и оторванности его от жизни. Решение этой проблемы лежит в русле *модернизации* содержания учебных программ и обеспечения их *преемственности* на всех уровнях. Положительное влияние на усвоение содержания математического образования окажет и его *технологизация*. Технологически организованный процесс обучения математике имеет высокую степень результативности, внедрение же современных информационно-коммуникационных технологий повышает интерес обучающихся к математике.

В современной России математическое образование является частью системы *непрерывного образования* и может сама рассматриваться как система. Она включает в себя следующие, тесно связанные друг с другом элементы. Дошкольное математическое образование (МО) → школьное МО (начальная школа, основная школа, старшая школа) → высшее МО (общее, специальное) → аспирантура. Каждый элемент системы основного непрерывного математического образования сопровождается формами и институтами дополнительного математического образования (кружки, факультативы, олимпиады, музеи и т.п.). Каждая ступень непрерывного математического образования имеет свои цели и решает специфические задачи.

2.2. Предмет теории и методики математического образования. Теория и методика математического образования как наука. Математика – наука и математика – учебный предмет. Взаимосвязи теории и методики математического образования с другими науками.

Теория и методика математического образования – наука о математике как учебном предмете и закономерностях математического образования обучающихся различных возрастных групп. Таким образом, предметом теории и методики математического образования является математика как учебный предмет.

Математика как наука и математика как учебный предмет. Для того чтобы иметь представление о математике как учебном предмете, раскроем представления о математике как науке, которая находится в непрерывном развитии. Это развитие обусловлено двумя основными причинами: потребностями практики и внутренними потребностями самой математики. Математика прошла несколько периодов своего развития. Очень кратко охарактеризуем их.

Период зарождения математики характеризуется формированием основных математических понятий – *числа, величины, геометрической фигуры*. Основные математические методы этого периода – наблюдение и опыт, в результате которых установлены некоторые правила решения достаточно широкого спектра практических задач на измерение и вычисление. Обоснования математических фактов отсутствовали.

Период математики постоянных величин начинается с VII-V вв. до н.э. с осознания необходимости доказательства математических фактов. Основным методом получения математических результатов становится *метод доказательства*. Первые теоремы доказаны знаменитым древнегреческим ученым и государственным деятелем Фалесом. В пифагорейской школе доказаны практически все теоремы прямолинейной геометрии. Обобщил древнегреческую математику, превратив ее в систему, построенную на аксиоматическом методе, гениальный Евклид. Древнегреческая математика сумела даже выйти за пределы элементарной математики – геометрии, арифметики, тригонометрии, начал алгебры: Архимед и Аполлоний создают теории, который стали предтечей интегрального исчисления и аналитической геометрии.

Период математики переменных величин начинается в XVII в. с введения новых метода и понятия – *координатного* метода и понятия *переменной величины*, на основе которых Декартом и Ферма строится аналитическая геометрия. Ньютон и Лейбниц независимо друг от друга создают основы дифференциального и интегрального исчислений. Вводится понятие функции, которое становится центральным понятием всей математики. Кроме аналитической геометрии и математического анализа бурно развиваются такие математические дисциплины как теория вероятностей, дифференциальная геометрия, теория чисел, вариационное исчисление и др.

Таким образом, до первой трети XIX в. математика имела своим *предметом постоянные и переменные величины, в качестве основного метода – метод доказательства*. Для решения внематематических задач все чаще используется метод математического моделирования.

Однако с появлением теории групп, неевклидовой геометрии и теории множеств, предметом математики все более становятся *математические структуры,* образованные во множествах введением отношений и операций, свойства которых описываются в виде аксиом. Значительно усиливается роль математического моделирования, которое становится доминирующим методом в математике. Мы называем этот период *периодом построения математических структур и их моделей*.

С середины XX в. объединенными усилиями математики и техники создается вычислительная техника, которая играет все большую роль в развитии самой математики, так как построение математических моделей существенно упрощается с помощью компьютерных наук. Мы считаем, что начался новый период развития математики, и назвали его *периодом компьютерной математики.* Итак, за время своего развития математика накопила не только необозримое множество фактов, но и создала множество теорий, все шире раскрывающих ее специфику и мощь ее методов.

Развитие общества невозможно без передачи новому поколению знаний и опыта предыдущих поколений, накопленных, прежде всего, наукой, в том числе математической. Возникает проблема отбора математического содержания для изучения в школе. Математика как учебный предмет должна включать в себя такие вопросы, которые могут дать достаточно цельное представление о математике-науке, ее роли в практике, способствовать воспитанию, развитию и быть доступной для понимания.

Естественно, что содержание учебного предмета математики не может не меняться со временем. Так, в середине прошлого века математика включала в себя такие предметы, как арифметика, алгебра, геометрия и тригонометрия. Предпринятая в 70-х гг. попытка существенно осовременить математику, изложив ее на основе теории множеств, понятий функции как отображения и геометрических преобразований оказалась неудачной. В настоящее время математика как учебный предмет включает в себя следующие дисциплины: математика (I-VI классы), алгебра (VII-IX классы), геометрия (VII-XI классы), алгебра и начала анализа (X-XIклассы).

Взаимосвязи теории и методики математического образования с другими науками. Теория и методика математического образования кроме математики, откуда она черпает содержание, взаимосвязана с такими науками, как философия, психология, педагогика, логика, история математики и др. Ограничимся характеристикой взаимосвязей теории и методики математического образования с перечисленными науками.

Философия– наука о наиболее общих характеристиках и фундаментальных принципах бытия и познания, которые явно или неявно отражаются в любой науке. Особое значение для теории и методики математического образования имеет такая ее составляющая, как теория познания, широко использующаяся как в методических исследованиях, так и непосредственно в математическом образовании. Например, широко используются в нем такие методы научного познания, как аналогия, обобщение, конкретизация, абстрагирование и др.

Психология – наука о закономерностях развития и функционирования психики. Она исследует закономерности восприятия, памяти, мышления, внимания и других познавательных процессов, а также такие психические свойства, как способности, мотивация, темперамент, характер. Особенно тесно связана теория и методика математического образования с педагогической и возрастной психологией.

Педагогика – наука о закономерностях обучении и воспитании человека. Теория и методика математического образования входит в педагогические науки, опираясь преимущественно на такую составную часть педагогики как дидактика, конкретизируя на обучение математике дидактические принципы, методы, формы и средства обучения.

Логика – наука о законах и формах мышления. Теория и методика математического образования специально рассматривает такие формы мышления, как понятия, суждения и умозаключения, в ее рамах разработана методика обучения этим формам мышления. Такие понятия, как «теорема», «доказательство», «правило вывода» и др., являются логическими понятиями, которые широко используются не только в теории и методике математического образования, но и в его практике.

История математики в настоящее время выделена в отдельную содержательно-методическую линию школьного курса математики, растворенную в других содержательно-методических линиях.

С одной стороны, существует концепция, в соответствии с которой личность в своем развитии повторяет основные этапы развития человечества. Следовательно, отдельный человек, овладевая математикой, проходит этапы развития математики как науки. Поэтому следует учитывать исторический опыт при отборе содержания математики как учебного предмета и последовательности изучения конкретных тем.

С другой стороны, история математики является мощным средством мотивации к ее изучению, стимулирует познавательный интерес к предмету, дает примеры мужества ученых-математиков в отстаивании своих идей, придает математическому образованию личностную значимость.

2.3. Цели математического образования. Различные подходы к целеполаганию в обучении математике: традиционный, технологический, личностно-ориентированный. Требования ФГОС к постановке целей обучения математике.

Любая плодотворная деятельность должна строиться, исходя из её конечных целей. Под *целью* будем понимать *результаты*, которые предполагает достичь учитель в процессе его совместной деятельности с учащимися.

Кроме того, под *целью* понимают *задачу*, стоящую перед человеком:

- Для чего и чему учить (цели учителя) [ввести понятие параллельных прямых];

- Для чего и чему учиться (цели ученика) [знать понятие параллельных прямых].

В процессе обучения цели учителя и учащихся вступают во взаимодействие. Эффективность достигается в случае сближения целей (цель общей деятельности учителя и учеников) [сформировать понятие параллельных прямых].

Можно выделить три различных подхода к формированию целей обучения математике: традиционный, технологический и личностно-ориентированный.

При *традиционном подходе* условно выделяют 4 группы целей:

- образовательные (обучающие, дидактические);
- развивающие;

- воспитательные;

- практические.

В качестве *образовательных* целей может выступать:

• передача учащимся конкретных математических знаний, формирование у них умений и навыков, необходимых для их дальнейшей жизни, профессиональной деятельности, при продолжении образования;

• сообщение учащимся основных математических идей, математических методов познания окружающего нас реального мира и способов учебно-познавательной деятельности;

• формирование у обучаемых умений математического моделирования различных практических ситуаций и решения ими возникающих таким образом математических задач и др.

Развивающими целями могут быть:

• развитие научного мировоззрения, объяснение роли математики в освоении научной картины мира;

• развитие мышления учащегося для его полноценного функционирования в современном обществе (эвристического, поискового, алгоритмического, абстрактного и др.);

• общекультурное развитие: реализация идей гуманизации и гуманитаризации математического образования; выявление роли математики в общем образовании человека;

• развитие логического мышления и пространственного воображения учащихся;

• развитие математической (устной и письменной) речи обучаемых;

• развитие осознания обучаемым интеграционных межпредметных взаимосвязей;

• развитие познавательных процессов, внимания, памяти, интуиции, элементов творческой деятельности обучаемых и др.

В качестве *воспитательных* целей можно выделить:

- воспитание общей культуры;
- выявление роли математики в развитии культуры на различных этапах развития общества;
- воспитание интереса к изучению математики;
- воспитание патриотизма и национального самосознания;
- воспитание высоких нравственных качеств личности;
- воспитание культуры общения, умения вести диалог, толерантности;
- формирование стремления учащегося к самооценке, самообразованию, самоконтролю и т.д.;
- воспитание воли, организованности, самостоятельности;
- эстетическое воспитание;
- экологическое воспитание и др.

Практические цели[2] связаны с:

- подготовкой учащихся к продолжению образования, к их будущей практической и профессиональной деятельности;
- формированием умения использования математических методов и, в частности, метода математического моделирования для решения практических задач;
- реализацией межпредметных связей;
- обучением учащихся выявлению наиболее рационального способа решения задачи в конкретной ситуации и др.

Технологический подход к постановке цели означает переход от общего представления о результате обучения к эталону (необходимо описать то, что учащийся сможет сделать в процессе обучения). Таким образом, цели

[2] Цели этой группы раньше были растворены в предыдущих группах, но, в последнее время, выделяются отдельно.

обучения формируются через результаты обучения, выраженные в действиях учащихся, которые учитель может надежно опознать и оценить. Реализации технологического подхода способствует разработка документа «Стандарты среднего математического образования» - система основных параметров, принимаемых в качестве государственной нормы образованности. Цель стандарта – спланировать обязательные результаты обучения.

В «Стандартах» требования к математической подготовке учащихся задаются в виде типовых заданий на двух уровнях: обязательная подготовка (минимум) и уровень возможностей (что может достичь учащийся).

Личностно-ориентированный подход к обучению математике предполагает следующую классификацию целей:

- личностные (осмысление целей обучения математике; приобретение веры в себя, в свои потенциальные возможности; реализация конкретных индивидуальных способностей и др.);
- предметные (формирование позитивного отношения к математике; знание основных математических идей, понятий и законов; выработка умений пользоваться математическими инструментами; решение типовых и творческих задач по математике и др.);
- креативные (составление сборника задач, написание математического реферата, сочинения; конструирование математической модели, изображение математического объекта; подготовка сообщения на школьную научную конференцию и др.);
- когнитивные (познание математической природы объектов окружающей реальности; изучение математических способов решения возникающих задач; овладение навыками работы со справочной и дополнительной литературой; постановка и проведение математического эксперимента и др.);

• оргдеятельностные (овладение навыками самоорганизации учебной математической деятельности; умение ставить перед собой цель, планировать деятельность по её достижению; развитие навыков работы в группе; освоение техники ведения дискуссии и др.).

Согласно требованиям ФГОС к современному уроку математики, перед обучающимися должны быть поставлены конкретные, достижимые, понятные и диагностируемые цели. По возможности целеполагание осуществляется совместно с учениками, исходя из сформулированной (желательно ими же) проблемы. В начале урока ученики должны знать, какие конкретно знания и умения (способы деятельности) они освоят в процессе своей деятельности (это одна из форм мотивации для обучающихся с ведущим левым полушарием мозга) и знать план/способ достижения поставленных задач (одна из мотиваций для правополушарных учащихся).

Современный ФГОС предполагает переход от триединой цели обучения (образовательной, развивающей, воспитательной) к формулировке целей через деятельность учащихся и далее к самостоятельному целеполаганию. Таким образом, цели конкретного урока становятся тесно связаны с формируемыми на нем результатами, которые представлены тремя группами: *предметные*, *личностные* и *метапредметные*. Последние формулируются в терминах *универсальных учебных действий* (УУД). В понятие «универсальные учебные действия» входят познавательные, коммуникативные, личностные и регулятивные УУД.

Основным критерием *предметных результатов* по математике в соответствии с требованиями стандарта является готовность к решению учебно-познавательных и учебно-практических задач, основанных на изучаемом предметном материале, с использованием сформированных способов действий, в том числе метапредметных.

Основными критериями *метапредметных результатов* являются:

- способность и готовность к освоению систематических знаний по математике, их самостоятельному пополнению, переносу в незнакомые ситуации и интеграцию (познавательные УУД);

- способность к сотрудничеству и коммуникации в ходе учебной и внеучебной деятельности по математике (коммуникативные УУД);

- способность и готовность к использованию ИКТ в целях обучения и развития (познавательные УУД);

- способность к самоорганизации, саморегуляции и рефлексии (регулятивные УУД).

Основным критерием *личностных результатов* служит сформированность УУД, включаемых в следующие три основных блока:

- сформированность основ гражданской идентичности личности (в том числе средствами истории отечественной математики);

- готовность к переходу к самообразованию на основе учебно-познавательной мотивации, в том числе готовность к выбору образования на профильном уровне;

- сформированность социальных компетенций, включая ценностно-смысловые установки и моральные нормы, опыт социальных и межличностных отношений, правосознание.

Таким образом, в первом приближении можно провести аналогию между предметными результатами и образовательными целями, личностными результатами и воспитательными целями, метапредметными результатами и развивающими целями.

2.4. Содержание обучения математике. **Школьные математические дисциплины. Нормативные документы математического образования: стандарты, программы, учебники. Основные содержательно-методические линии обучения математике.**

В методике под *содержанием обучения математике* традиционно понимается совокупность систематизированных знаний, умений и навыков, взглядов и убеждений, отражающая определенный уровень развития познавательных сил и практической подготовки.

Содержание образования строится с учетом факторов, доминирующих на данном этапе развития общества. К основным *критериям отбора содержания обучения математике* относятся: критерий соответствия логике математики как науки (дедуктивный и непреложный характер математических выводов, абстрактность, универсальность, место в системе наук); критерий соответствия основным принципам обучения (научность, последовательность, систематичность и др.); критерий соответствия психологическим возможностям и возрастным особенностям школьников; критерий соответствия выделенному времени на изучение математики; критерий учёта требований государственных образовательных стандартов; критерий учёта потребностей личности в образовании (дифференцированное обучение, коррекционное обучение и т.д.).

В современной российской школе изучение предметов математического цикла осуществляется на протяжении всех лет обучения: с I по XI классы. Изучаются *предметы*: Математика (V-VI классы), Алгебра (VII-IX классы), Геометрия (VII-IX классы), Алгебра и начала анализа (X-XI классы), Геометрия (X-XI классы).

Однако такое подразделение школьного курса математики на предметы весьма условно. Например, в рамках предмета «Алгебра и начала анализа» рассматриваются вопросы арифметики (учение о числе), алгебры (тождественные преобразования, уравнения и неравенства), математического анализа (функция, предел функции, производная, интеграл и т.п.), аналитической геометрии (метод координат). Таким образом, предмет «Алгебра и начала анализа» представляет совокупность различных вопросов математики. Это относится и к другим предметам математического цикла.

Содержание обучения математике отражается в ряде *нормативных документов. Базисный учебный план* является обязательным для всех учебных заведений, дающих среднее образование. В структуру базисного учебного плана входят инвариантная и вариативная части. Инвариантная часть включает образовательные области, обеспечивающие формирование личностных качеств обучающихся в соответствии с общечеловеческими идеалами и культурными традициями, создающие единство образовательного пространства на территории страны. Математика входит в инвариантную часть базисного учебного плана и является обязательным предметом для изучения во всех типах общеобразовательных учреждений. На изучение математики в основной школе отводится не менее 5 часов, в старшей – не менее 4 часов на базовом уровне и не менее 6 часов – на профильном уровне.

Программы по математике общеобразовательных учреждений фиксируют содержание образования определенного уровня и направленности. Их многообразие является результатом процесса дифференциации в обучении математике. Учебные программы по математике включают перечень тем изучаемого материала, рекомендации по количеству времени на каждую тему, перечень знаний, умений и навыков по предмету.

Конкретизация содержания образования в соответствии с программами осуществляется в *учебниках*. Ежегодно Приказом минобрнауки России утверждается *федеральный перечень учебников*. В федеральный перечень включаются учебники, рекомендованные Научно-методическим советом по учебникам и отвечающие следующим требованиям: принадлежащие к завершенной предметной линии учебников; представленные в печатной форме и имеющие электронные приложения; имеющие методическое пособие для учителя, содержащее материалы по методике преподавания.

Анализируя школьные программы по математике, можно вычленить следующие *содержательно-методические линии обучения математике*:

1) линия чисел и вычислений;

2) линия выражений и тождественных преобразований;

3) функциональная линия;

4) линия уравнений и неравенств;

5) стохастическая линия;

6) линия геометрических фигур и их свойств;

7) линия геометрических величин;

8) векторно-координатная линия.

Обучающая цель изучения материала *линии чисел и вычислений*: формирование у учащихся знаний о числах и действиях с ними, вычислительных умений и их использование для решения практических задач, вычислительной и алгоритмической культуры. Содержание линии чисел и вычислений обладает большим гуманитарным потенциалом. Это – история арифметики, исторические и занимательные задачи самого разного содержания (например, краеведческого, экологического, валеологического, литературного и т.д.).

Линия выражений и тождественных преобразований пронизывает весь курс школьной математики. Основы тождественных преобразований закладываются еще в начальной школе (законы арифметических действий), но это изучение носит пропедевтический характер. Систематически и углубленно эти вопросы изучаются в курсе алгебры, начиная с седьмого класса. Последовательность изучения тождественных преобразований выражений в школьном курсе алгебры следующая: целые выражения (одночлены и многочлены) (VIIкласс); дробные рациональные выражения, арифметические квадратные корни (VIII класс); степень с рациональным показателем, корни n–й степени (IX-X классы); тригонометрические выражения, логарифмические выражения (X-XIклассы).

Изучение материала *функциональной линии* имеет основной учебной целью осознание учащимися понятия функции как одной из основных математических моделей, позволяющей описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами, и овладение простейшими методами исследования функций. Функциональный материал дает возможность ставить цели развития всех познавательные процессов, в частности, диалектического мышления, функционального стиля мышления, мировоззрения (диалектика), раскрывать общенаучную и общекультурную роль математики, осуществлять эстетическое, экологическое воспитание, профессиональную ориентацию учащихся. В 5-6-х классах начинается подготовительная работа к изучению понятия функции при работе с буквенными выражениями. В основной школе водятся понятие функции и связанные с ней понятия: аргумент, область определения и область значения функции. Рассматриваются различные способы задания функций: аналитически, графически, с помощью таблицы, описанием. Далее изучаются конкретные функции: прямая пропорциональность, линейная функция, обратная пропорциональность, функции $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, квадратичная функция, степенная функция, тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции.

Прикладная направленность *линии уравнений и неравенств* раскрывается главным образом при изучении алгебраического метода решения текстовых задач. Теоретико-математическая направленность проявляется при изучении наиболее важных классов уравнений, неравенств и их систем, а также при рассмотрении обобщенных понятий и методов, относящихся к линии в целом. Линия уравнение и неравенств тесно связана с числовой линией. Все числовые области, рассматриваемые в школьном курсе, за исключением области всех действительных чисел, возникают в связи с решением уравнений, неравенств, систем. Каждая вновь введенная числовая область расширяет возможности составления и решения различных уравнений и неравенств. Линия уравнений и неравенств тесно связана с функциональной линией. Эта связь проявляется в приложении методов, разрабатываемых в линии уравнений и неравенств, к исследованию функции (например, нахождение области определения некоторых функций, промежутков знакопостоянства и др.). Функциональная линия оказывает существенное влияние на содержание линии уравнений и неравенств: функциональные представления служат основой привлечения графической наглядности к решению и исследованию уравнений, неравенств и их систем.

В 2004 г. в качестве федерального компонента в школьную программу были включены такие темы, как элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей. Они составили основу с*тохастической линии*, которая включена в обучение основной и старшей школ. Стохастическая линия предполагает освоение следующего содержания: множества и комбинаторика; алгебра событий; достоверные, невозможные и случайные события; виды случайных событий; статистический эксперимент, частота и вероятность; выборка и ее анализ статистическими методами.

Традиционно в основной школе изучается курс планиметрии, а в старшей – курс стереометрии. Содержание курса геометрии группируется вокруг двух традиционных стержневых содержательно-методических линий: *«Геометрические фигуры и их свойства»* и *«Геометрические величины»*. Однако линия геометрических фигур является ведущей, поскольку на неё замыкаются остальные линии. Для изучения фигур необходимо знать свойства отношений (параллельности, перпендикулярности, равенства, подобия). Изучение геометрических фигур и их измерений одним блоком позволяет значительно расширить тематику задачного материала.

Координатно-векторная линия не может быть отнесена к традиционным. Векторы впервые вошли в курс геометрии отечественной школы в середине 70-х годов прошлого века и получили всеобщее признание в силу большой общеобразовательной значимости и обширности практических приложений (прежде всего в физике). Однако методика применения векторов к решению задач, а тем более использование векторного метода в теории находится ещё в стадии разработки. Поэтому векторы недостаточно широко используются в современном курсе геометрии.

2.5. Методы обучения математике. Понятие метода обучения. Классификации методов обучения математике. Характеристика групп методов и отдельных методов. Примеры их использования в процессе обучения математике.

В теории познания *метод* определяется как система последовательных шагов, действий, которые приводят к решению определённой задачи или достижению намеченной цели. *Методы обучения* – это способы взаимодействия учителя и учащихся, направленного на достижение целей образования, воспитания и развития школьников в ходе обучения. Любой метод обучения предполагает цель, систему действий, средства обучения и намеченный результат. Какой-либо один метод обучения не используется в чистом виде: учитель сочетает различные методы обучения.

В современной методике обучения математике *проблема методов* не нашла однозначного решения. Существует немало попыток классифицировать методы обучения. Остановимся на наиболее распространённых из них.

1. Классификация Ю.К. Бабанского основана на сопоставлении групп методов обучения компонентам взаимосвязанной деятельности педагогов и учеников по осуществлению задач образования, воспитания и развития: организационно-действенному, стимулирующему и контрольно-оценочному. В классификации Ю. К. Бабанского методы обучения разделяются на три группы, каждая из которых подразделяется на подгруппы:

1) *методы организации и осуществления учебно-познавательной деятельности:*

– по источнику передачи и восприятия учебной информации: словесные (объяснение, рассказ, беседа, лекция), наглядные (иллюстрация, демонстрация, практические опыты), практические (опыты, упражнения, учебно-производительный труд);

– по логике передачи и восприятия учебной информации: индуктивные, дедуктивные, аналитические и синтетические;

– по степени самостоятельности мышления школьников: репродуктивные, поисковые, частично-поисковые, исследовательские;

– по степени управления учебной работой: методы работы под руководством учителя и методы самостоятельной работы учащихся (работа с книгой, письменная работа, лабораторная работа, выполнение трудовых заданий);

2) *методы стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности:*

– методы стимулирования и мотивации интереса к учению (познавательные игры, учебные дискуссии, создание ситуаций эмоционально-нравственных переживаний, создание ситуаций занимательности, создание ситуации апперцепции (опоры на жизненный опыт), создание ситуаций познавательной новизны);

– методы стимулирования и мотивации долга и ответственности в учении (убеждения в значимости учения, предъявление требований, упражнения по выполнению требований, поощрение успеха в учении, порицание недостатков в учении);

3) методы контроля и самоконтроля за эффективностью учебно-познавательной деятельности:

– методы устного контроля и самоконтроля: фронтальный или индивидуальный опрос, рассказ ученика, чтение текста, объяснение схемы;

– методы письменного контроля и самоконтроля: контрольная работа, реферат, изложение, сочинение, диктант, тест;

– методы лабораторно-практического контроля (практические и лабораторные работы, машинный контроль).

2. Классификация Р.С. Черкасова и А.А. Столяра предполагает разбиение системы методов обучения математике на две группы: общие (разработанные дидактикой и адаптированные к обучению математике) и частные (отражают основные методы познания, используемые в математике).

3. В основу *классификации Ю. М. Колягина* положены различия между деятельностью учителя и учащихся, что позволяет выделить две группы методов:

– методы преподавания (деятельность учителя): информационные методы (беседа, рассказ, лекция) и методы управления поисковой деятельностью учащихся (управление самостоятельной работой учащихся тренировочного характера, руководство работой учащихся с учебной литературой);

– методы изучения (деятельность учащегося): методы познания учебного материала (анализ, синтез, сравнение, моделирование и др.), репродуктивные и продуктивные методы изучения (обучение на моделях, эвристический метод, метод программированного обучения и др.).

4. Классификация О. *Б. Епишевой* предполагает выделение следующих групп методов обучения математике: методы педагогики, методы психологии, методы логики, методы математики, методы информатики, методы истории, эмпирические методы.

Охарактеризуем некоторые из методов обучения математике, приводя примеры их использования в учебном процессе.

Рассказ – последовательное изложение преимущественно фактического материала в описательной или повествовательной форме. На уроках математики рассказ целесообразно применять при изложении нового материала в тех случаях, когда новое излагается с опорой на имеющиеся знания или является обобщением этих знаний.

> *Пример 1.* Объясняя сущность десятичной системы счисления, причину ее всеобщности, учитель может использовать в доступной для учащихся форме необходимый исторический материал. Систематизируя материал по вопросу о метрической системе мер и о мерах времени, учитель в связном рассказе может сообщить учащимся необходимые дополнительные сведения, которые дают более полное представление об этих системах мер в целом.

Беседа – словесный диалогический метод изложения учебного материала. Сущность беседы заключается в том, что учитель путем умело поставленных вопросов побуждает учащихся к рассуждению, к анализу в определенной логической последовательности изучаемых фактов и явлений и самостоятельному формулированию соответствующих теоретических выводов и обобщений. Этот метод чаще всего применяется тогда, когда изучаемая тема является сравнительно несложной и когда по ней у учащихся имеется определенный запас представлений или жизненных наблюдений, позволяющих осмысливать и усваивать знания эвристическим путем. При изложении нового материала (вычислительного приема, свойства геометрических фигур) беседа должна представлять такую систему вопросов, которая подводила бы учеников к более или менее самостоятельному выводу. В таких случаях принято добавлять к слову «беседа», еще и прилагательное «эвристическая».

Объяснение – словесный метод, направленный на раскрытие существенных свойств изучаемого объекта, его внутренней структуры и связей с другими объектами. К методу объяснения целесообразно прибегать в тех случаях, когда материал для учащихся оказывается сложным или требует аргументации, которой учащиеся еще не овладели. При изучении нового материала метод объяснения используется на практике в двух вариантах. Один из них можно назвать *повествовательным,* другой – *проблемным*. Повествовательное изложение проходит без постановки вопросов, проблемное же, как правило, начинается с постановки вопроса. Метод объяснения предполагает использование специального типа речи – *рассуждения*. Учитель не только вводит какое-либо новое понятие, правило, прием выполнения арифметического действия, объясняет зависимость между компонентами арифметического действия, но и обосновывает вводимое положение, приводя логические аргументы и примеры, раскрывая существующие связи и зависимости.

Лекция – словесный метод обучения, предусматривающий устное изложение учебного материала, который характеризуется большим объемом, сложностью логических построений, концентрированностью доказательств и обобщений. Этот метод применяется в старших классах, когда учащиеся уже имеют необходимый уровень подготовки для восприятия и осмысления. В процессе ведения лекции учитель следует четкому плану, акцентирует внимание учащихся на центральных вопросах темы, сопровождает изложение четкой записью на классной доске или слайдами презентации.

Метод упражнений – один из основных практических методов обучения математике. *Упражнение* – повторное (многократное) выполнение умственного или практического действия с целью овладения им или повышения его качества. В обучении математике упражнения по своему характеру подразделяются на устные, письменные и графические. По степени самостоятельности при выполнении упражнений выделяют: упражнения по воспроизведению известного с целью закрепления – *воспроизводящие упражнения*; упражнения по применению знаний в новых условиях – *тренировочные упражнения.*

> *Пример 2.*На уроке с помощью учителя коллективно выведены формулы приведения тригонометрических функций для углов в промежутке (0; π) и выявлен общий метод получения этих формул. Вывод формул приведения для углов в промежутках (π; 3π/2) и (3π/2; 2π) – самостоятельное упражнение тренировочного характера.

К *лабораторным и практическим работам* по математике относят самостоятельные работы, направленные на измерение и составление таблиц, вычерчивание графиков, данные которых затем будут служить основой для теоретических выводов и обобщений.

> *Пример 3.* При изучении функции $y = ax$ и её графика для установления значения коэффициента а можно предложить ученикам следующую практическую работу: построить графики функции при различных значениях а. Результаты могут быть сведены в одну таблицу или на одну координатную сетку.

Работа с книгой как метод обучения математике направлен на закрепление знаний, полученных на уроках в классе, но он может быть и источником новых знаний при специально организованной самостоятельной работе учащихся. Особой популярностью в современных условиях начинают пользоваться электронные учебники. Содержание параграфов таких учебников полностью совпадает с тем, что напечатано в бумажных учебниках. Но в электронной версии к текстам добавлены изображения, видеозаписи, аудиофайлы.

Основными *методами контроля* на уроках математики являются: устный опрос, самостоятельная работа, контрольная работа, письменная практическая работа, стандартизованный опрос. В последнее время в теории и практике контроля стали применяться понятие «тест». *Тесты* – стандартизованные задания, по результатам выполнения которых судят о знаниях, умениях и навыках испытуемого.

2.6. Научные методы в обучении математике. Индукция и дедукция в обучении математике: характеристика каждого научного метода, примеры использования в школьном математическом образовании.

Выделяют три основных значения понятия *«индукция»*: 1) индукция как *умозаключение*, в котором из двух или нескольких единичных или частных суждений получают новое общее суждение; 2) индукция как *метод исследования*, при котором путем изучения частных случаев получают новые общие утверждения, положения, гипотезы; 3) индукция как *метод изложения информации*, когда от менее общих, единичных частных положений идут к общим выводам. Использование этого метода в процессе обучения называют *индуктивным методом обучения.* Приведем пример использования этого метода.

Пример 1. Перед изучением теоремы о пересечении высот треугольника учащиеся рассматривают остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники и убеждаются, что во всех случаях все высоты пересекаются в одной точке.

Различают два вида индуктивных умозаключений: *полные* и *неполные*. *Неполная индукция* – умозаключение, которое основывается на рассмотрении одного или нескольких единичных или частных суждений, относящихся к рассматриваемому понятию.

*Пример 2.*В процессе обучения неполная индукция проявляется, например, при изучении переместительного закона сложения, которое ведется по схеме: 3+2=2+3, значит a+b=b+a.

Пример 3. При изучении темы «Длина окружности и площадь круга», учащиеся, имея при себе несколько заранее заготовленных кругов, вырезанных из картона, линейку и нить, самостоятельно эмпирическим методом находят значение числа π.

Приведенные примеры иллюстрируют применение неполной индукции в процессе обучения. При этом в первом примере рассмотрен только один частный случай, а во втором – несколько.

Вывод, основанный на неполной индукции, может быть ошибочным, поэтому этот метод применяется осторожно. В этом плане показателен следующий пример.

Пример 4. Рассмотрим последовательность, заданную следующей формулой: $2^{2^n}+1$, где *n* – целое неотрицательное число.

n=0,f(0)=$2^{2^0}+1=3$ – простое число;

n=1,f(1)=$2^{2^1}+1=5$ – простое число;

n=2,f(2)=$2^{2^2}+1=17$ – простое число;

n=3,f(3)=$2^{2^3}+1=257$ – простое число.

На основании рассмотрения этих частных случаев логичным кажется следующий вывод: последовательность является последовательностью простых чисел. Еще французский математик П. Ферма, интересуясь способами построения простых чисел, высказал такое предположение. Вывод был сделан на основании метода неполной индукции: первые четыре члена последовательности, как мы уже видели, действительно являются простыми числами. Однако Леонард Эйлер в 1733 г. опроверг это утверждение Ферма. Для этого достаточно было показать, что при п=5 число $2^{32}+1$ делится на 641 .

Полная индукция – умозаключение, которое основывается на рассмотрении всех единичных и частных суждений, относящихся к рассматриваемому понятию. Полная индукция является методом решения задач и доказательства теорем. Достоинство этого метода – достоверность, недостаток – громоздкость.

Пример 5. С помощью полной индукции легко показать, что любое четное натуральное число $n\in(4,20)$ можно представить в виде суммы двух простых слагаемых.

Индуктивный метод обучения имеет свои достоинства и недостатки. К его *достоинствам* относят следующие: 1) использование метода делает вывод очевидным, достаточно убедительным, вытекающим из конкретных ранее изученных фактов; 2) метод способствует формированию умения наблюдать, анализировать изучаемые явления; 3) индуктивный метод наводит учащихся на открытие, позволяет им стать активными участниками учебного процесса. К *недостаткам* индуктивного метода обучения относят следующие: 1) при его использовании на изучение нового материала требуется больше времени; 2) недостаточно развивается абстрактное мышление, так как метод опирается на конкретные факты, опыты и т.п.

При использовании индуктивного метода в обучении необходимо обращать внимание учащихся, что сделанный вывод является лишь предположением (гипотезой), которое может быть доказано (если оно истинно) или опровергнуто (если оно ложно). С 1-го по 6-ой класс, обучение математике ведется преимущественно индуктивным методом. Полученные с его помощью знания на этом этапе обучения являются достаточно убедительными для учащихся. В дальнейшем обучении индукция постепенно уступает первенство дедукции.

Аналогично понятию «индукция», выделяют три основных значения понятия *«дедукция»*: 1) дедукция как *умозаключение*, при котором от одного общего суждения и одного частного суждения получают новое, менее общее или частное суждение; 2) дедукция как *метод исследования* характеризуется тем, что для получения нового знания о некотором объекте, находят ближайший к нему класс объектов, и применяют к этому объекту существенные свойства этого класса объектов; 3) дедукция как *форма изложения информации* и как один из *методов обучения* характеризуется тем, что от общих правил и положений переходят к менее общим (частным) правилам и положениям. Этот метод называют *дедуктивным методом обучения*. Покажем реализацию этого метода в процессе обучения на следующем примере.

Пример 6. Применяя один из признаков параллельности прямых к решению конкретной геометрической задачи, мы используем дедукцию. В качестве общего положения мы рассматриваем непосредственно сам признак: если при пересечении двух прямых a иbсекущей c накрест лежащие углы равны, прямые параллельны, В качестве частного положения мы рассматриваем следующее утверждение: два конкретных угла, образованные этими прямыми и секущей, являются накрест лежащими и равными между собой. В результате получаем еще одно частное положение: прямые a иbпараллельны.

Таким образом, дедуктивное умозаключение предполагает выполнение следующих действий: 1) формулировку общего суждения – свойства, которым обладают все объекты изучаемого множества; 2) проверку истинности его для данных объектов этого множества; 3) формулировку частного суждения о наличии или отсутствии у данных объектов общего свойства.

Использование дедукции как метода обучения предполагает обучение учащихся поиску доказательств, умению рассуждать, преобразовывать утверждения, полученные опытным путем или с помощью эвристических методов (индукции, аналогии и т.д.) в систему, которая углубляет и расширяет сформированную ранее базу знаний.

Индукция и дедукция тесно связаны и дополняют друг друга, что обусловливает *индуктивно-дедуктивный метод обучения.* В этом случае осуществляется переход от частных случаев (примеров, фактов, практических опытов) к общему положению, а затем к осмыслению других частных случаев.

> *Пример 7.* При изучении переместительного закона сложения натуральных чисел сначала применяется индуктивный метод обучения – решаются примеры, выделяется общее, типичное для каждого из них, а затем дедуктивный метод – закон используется для других чисел.

2.7. Научные методы в обучении математике. Анализ и синтез в обучении математике: характеристика каждого научного метода, примеры использования в школьном математическом образовании.

Анализ - метод исследования, состоящий в том, что изучаемый объект мысленно или практически расчленяется на составные элементы (признаки, свойства, отношения), каждый из которых исследуется в отдельности как часть расчлененного целого.

Синтез- метод исследования, состоящий в соединении отдельных свойств элементов объекта в единое целое.

Анализ и синтез играют важную роль не только как методы научного познания. Большое значение они имеют как методы доказательства теорем и решения задач. В методике обучения математике это противоположно направленные друг другу операции мышления. Первый – от требования задачи, теоремы и т.д. к ее условию, второй – наоборот.

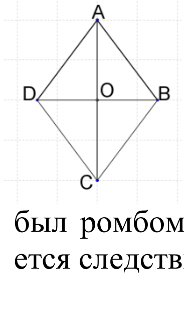
Анализ в процессе обучения математике используется при подготовке учащихся к введению определений, алгоритмов, раскрытия сущности математических утверждений, как средство поиска решения задач, доказательства теорем и т.д.

Выделяют два *вида* анализа: *восходящий анализ* и *нисходящий анализ*.

При *восходящем анализе* исходным пунктом решения является заключение задачи (теоремы), справедливость которого устанавливается путем отыскания достаточных признаков истинности этого утверждения. Ведущий вопрос при этом: «Что надо знать, чтобы ответить на поставленный вопрос?». Логика рассуждений строится с помощью ответов на вопросы.

Восходящий анализ имеет свои достоинства и недостатки. К *достоинствам* относят следующие: имеет отправной пункт, мотивируется каждый шаг, осознается план рассуждений, усиливается активность учащихся. К *недостаткам* - не всегда безотказный путь рассуждения (можно подобрать несколько оснований и высказывание пойдет по неверному пути), школьные курсы являются синтетическими (не каждое доказательство излагается аналитически). Приведем пример доказательства теоремы с помощью восходящего анализа.

Пример 1. Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.



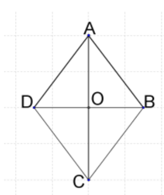
Для того, чтобы показать, что $AC \perp BD$ достаточно доказать, что $AO \perp BD$. Для того, чтобы показать, что $AO \perp BD$ достаточно доказать, что AO – высота ΔADB. Для того, чтобы показать, что AO является высотой ΔADB достаточно показать, что AO – медиана ΔADB и ΔADB - равнобедренный. Для доказательства последних утверждений достаточно, чтобы ABCD был ромбом. Итак, перпендикулярность диагоналей четырехугольника является следствием того, что четырехугольник является ромбом.

При *нисходящем анализе* преобразование заключения задачи (теоремы) устанавливается путем отыскания необходимых признаков истинности этого утверждения. Ведущие слова при этом: «Предположим, что предложение, которое нужно доказать, установлено. Что из этого следует?». С опорой на доказанные теоремы выводятся несколько следствий. Итоговое утверждение либо противоречит известным предложениям либо является одним из них. Однако необходимо знать, что этот вид анализа доказателен только после того, как с помощью синтеза удается определить, что найденное соотношение является достаточным условием.

К *достоинствам* нисходящего анализа относят следующие: осуществление поиска плана доказательств; использование в качестве педагогического метода Сократа: если ученик не прав, учитель с помощью правильно подобранного вопроса приводит его к противоречию.

Синтез в процессе обучения математике используется при формулировке определений, математических утверждений, поиске доказательств теорем и метода решений задач. Он часто применяется в лекциях учителя. Синтетический метод доказательства математических утверждений имеет свои достоинства и недостатки. К *достоинствам* относят следующие: доказательство логически безупречно, сжато, кратко, уместно в логически не трудных теоремах и задачах. Среди *недостатков* такие: для этого метода характерным является только описание процесса доказательства утверждения. При этом отсутствует мотивировка выбора исходных положений, их целесообразность видна в последний момент, выводы кажутся искусственными. Синтетический метод не пригоден как метод поиска доказательства. Приведем пример доказательства синтетическим методом.

Пример 2. Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.



Рассмотрим ΔABC - равнобедренный. В нем AO=OC – по свойству параллелограмма, поэтому BO – медиана этого треугольника. А значит и высота. Поэтому $BO\perp AC$, а значит и $BD\perp AC$.

При синтетическом доказательстве у учащегося возникает большое количество вопросов. Например, почему доказательство начинается именно с рассмотрения ΔABC?

Почему именно этот треугольник надо рассматривать? А другой можно? И так далее. При аналитическом доказательстве этого удается избежать, что свидетельствует о значительном методическом преимуществе аналитического метода.

Аналитический и синтетический методы тесно взаимосвязаны, образуя единый *аналитико-синтетический метод*. В задачах на доказательство и вычисление анализ состоит в разбиении на подзадачи, а синтез - в объединении их решений. В задачах на построение анализ состоит в предположении того, что задача решена, выполнении эскиза, выделении данных и искомых элементов и установлении зависимости между ними. Результатом анализа будет составление плана решения задачи. В выполнении этого плана состоит синтез. При решении текстовых задач алгебраическим методом анализ состоит в выделении искомой величины, обозначении неизвестного, выражении остальных величин через неизвестное и данные задачи, установлении равенства. Синтез состоит в решении полученного уравнения и переводе его на язык задачи.

2.8. Научные методы в обучении математике. Наблюдение и опыт в обучении математике. Обобщение и абстрагирование в обучении математике.

Наблюдение – метод изучения свойств и отношений отдельных объектов и явлений окружающего мира в естественных условиях.

Опыт – метод изучения свойств и отношений отдельных объектов и явлений окружающего мира в искусственных условиях путем расчленения их на части и соединения либо новым способом, либо с другими объектами и явлениями.

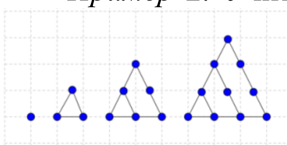
Эти методы широко используются в экспериментальных науках (физике, химии). Математика, вообще говоря, таковой не является. Однако при обучении математике в начальной и средней школах они играют большую роль, т.к. с их помощью учащимся предоставляется возможность самостоятельно изучать факты, «открывать» новые свойства понятий, делать предположения, строить гипотезы. Проиллюстрируем на нескольких примерах применение этих методов в обучении математике.

Пример 1. Учитель показывает примеры числовых последовательностей с которыми учащиеся уже встречались ранее:

1) 1,2,3,4,… - последовательность натуральных чисел;
2) 2,4,6,8,… - последовательность четных чисел;
3) 1,3,5,7,… - последовательность нечетных чисел;
4) 1,4,9,16,… - последовательность квадратов натуральных чисел;
5) 2,3,5,7,… - последовательность простых чисел.

Учащиеся называют каждую последовательность, определяя (если возможно) закономерность появления последующего числа и пытаются сформулировать определение числовой последовательности. Задавая наводящие вопросы, учитель помогает увидеть, что каждое число из набора имеет свой номер, который показывает, на какой позиции находится рассматриваемое число, причем номер является натуральным числом. Выведенное учащимися определение должно иметь вид: если каждому натуральному числу поставлено в соответствие определенное действительное число, то говорят, что задана числовая последовательность. Таким образом, числовая последовательность является функцией натурального аргумента.

Пример 2. Учитель рассказывает, что французский математик Люка



высказал предположение, что к рассмотрению треугольных чисел человек мог прийти из наблюдения над стаями птиц, которые при перелетах располагаются такими треугольниками. Помимо треугольных, существуют четырехугольные числа (последовательность квадратов натуральных чисел). Затем можно предложить учащимся:

1) самостоятельно найти какой-либо член последовательности треугольных чисел;

2) ответить на вопрос: в связи с чем, по их мнению, люди могли заинтересоваться последовательностью четырехугольных чисел.

Опыт и наблюдение помогают учащимся сознательно усвоить изучаемый материал, более глубоко вникнуть в его смысл. В методической литературе выделяется определенная последовательность действий учителя и учащихся при использовании этих методов: 1) определить цель наблюдения; 2) выделить объект наблюдения и организовать удобные условия наблюдения; 3) определить наиболее целесообразные для данного случая способы фиксирования получаемой в процессе наблюдения информации; 4) выполнить наблюдение; 5) произвести анализ и обработку результатов наблюдения; 6) сделать выводы. Продемонстрируем это на примере.

Пример 3.

1) Цель наблюдения: получить формулу для вычисления объема пирамиды, зная формулу объема призмы;

2) в качестве объектов наблюдения нужно взять 2-3 пары моделей призм и пирамид, имеющих одинаковые основания и высоты;

3) фиксирование результатов можно выполнять в произвольной форме;

4) в пирамиду насыпается песок, а затем он пересыпается в призму. И так до тех пор, пока призма полностью не заполнится. Затем то же самое проделывается с другой парой многогранников;

5) анализируя полученную информацию, учащиеся убеждаются в том, что процедура наполнения призмы с помощью пирамиды каждый раз повторяется три раза;

6) вывод: объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту пирамиды.

Однако надо помнить, что необходимо воспитывать у школьников правильное отношение к выводам, сделанным на основе опыта и наблюдения. С этой целью учащимся демонстрируются контрпримеры, которые показывают, что эти методы получения знаний могут привести к неверным суждениям. В качестве примера, иллюстрирующего вышесказанное, приведем следующий.

Пример 4. На основании того, что $2^4 = 4^2$ нельзя сделать вывод о существовании переместительного закона возведения в степень.

Такого рода примеры помогают выработать у учащихся потребность в логических доказательствах. Необходимо довести до сознания учащихся, что только логика приводит к неоспоримым выводам.

Обобщение – логический прием, состоящий в мысленном выделении общих существенных свойств, принадлежащих рассматриваемому множеству объектов.

Абстрагирование – логический прием, состоящий в отделении существенных свойств рассматриваемого множества объектов, выделенных в результате обобщения, от несущественных и мысленное отвлечение от последних. Проиллюстрируем на нескольких примерах применение этих методов в обучении математике.

Пример 5. При выводе формулы п – го члена геометрической прогрессии сначала рассматривают конкретные примеры на вычисление нескольких первых членов прогрессии по ее первому члену и знаменателю. При этом используются следующие равенства:

$b_2 = b_1 \cdot q$; $b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2$; $b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3$ и т.д.

Обобщая эти равенства, получают формулу для вычисления любого члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Пример 6. Учащимся предлагают решить следующую задачу: насыпь шоссейной дороги имеет в верхней части ширину 60 м. Какова ширина насыпи в нижней ее части, если угол наклона откосов к горизонту равен 60^0, а высота насыпи равна 12 м. Решая эту задачу, учащиеся интересуются длиной верхней и нижней части насыпи, углом наклона откоса к горизонту, отвлекаясь от других ее свойств (протяженность насыпи, строительные материалы, которые используются и т.д.). При этом возникает абстрактная модель насыпи в виде равнобедренной трапеции.

В зависимости от организации процесса обобщения различают два типа обобщения – *теоретическое* и *эмпирическое*. При *эмпирическом обобщении* знания получаются в результате индуктивных умозаключений. При этом учащимся предлагается для рассмотрения как можно больше примеров, позволяющим им подметить ту или иную закономерность. Варьируя задания, используя схемы и чертежи, учитель помогает ученикам оформить результаты своих наблюдений в виде формулировки, закона, свойства и т.д. Рассмотрим на конкретном примере как можно реализовать эмпирическое обобщение.

Пример 7. Для того, чтобы подвести учащихся к формулировке свойства вычитания суммы из числа, учащимся предлагаются для решения примеры следующего типа:

1) 12-(5+3)=… 12-5-3=… 12-5+3=…;

2) 21-(13+6)=… 21-13-6=… 21-13+6=…. и т.д.

Выясняется, в каких случаях результаты вычислений совпадают, а в каких нет. Учитель помогает сформулировать свойство с помощью наводящих вопросов. Затем формулируется вывод и свойство записывается в виде формулы.

При *теоретическом обобщении* знания получаются в результате анализа данных о каком-нибудь объекте или ситуации с целью выявления внутренних связей. Для реализации этого типа обобщения необходимо заранее продумывать такие действия с математическими объектами в результате которых учащиеся могут самостоятельно «открывать» существенные свойства изучаемых понятий и общих способов действий с ними.

Пример 8. Для формирования понятия «больше на…» учащимся можно предложить три комплекта счетных палочек разного цвета (например, белого и синего и красного). Надо сделать так, чтобы палочек белого цвета было больше, чем палочек синего цвета на определенное количество красных палочек. При этом нельзя пересчитывать палочки. Устанавливая взаимно–однозначное соответствие, учащиеся выкладывают в белом комплекте столько же палочек, сколько их в синем, а затем добавляют столько палочек, сколько их в красном комплекте. При этом учащиеся овладевают общим способом действия «столько же и еще».

Обобщение используется при действии подведение под понятие, изучении содержания теоремы, на этапе анализа решения задачи.

Абстракция также как и обобщение может выступать в двух различных формах. *Первая форма* реализуется в чувственном познании предмета, когда мы отвлекаемся от одних (несущественных) свойств и выделяем другие (существенные) свойства. Рассматривая в геометрии пространственные тела, мы абстрагируемся от всех других свойств кроме геометрических. Нас не интересует цвет этого тела, из какого материала оно изготовлено, его масса и т.д. При этом мы обращаем внимание на его форму, размеры, положение в пространстве и т.д.*Вторая форма* выходит за пределы чувственного. В случае ее реализации происходит не только отбор существенных свойств объекта, но и их преобразование. Так, изучая в школе различные свойства функций (монотонность, четность – нечетность и т.д.), мы отвлекаемся от особенностей конкретного вида функции (линейной, квадратичной и т.д.). Это дает нам возможность рассуждать о любых функциях.

Абстрагирование используется при введении понятий, изучении содержании теоремы. При решении текстовых задач, создавая математическую модель, мы также абстрагируемся от содержания задачи. Но затем мы снова к нему возвращаемся и учитываем его в дальнейших рассуждениях.

2.9. Формы мышления в обучении математике. Понятие. Математическое понятие. Содержание и объем понятия. Определение понятия. Виды определений. Требования к определению. Методика формирования математических понятий.

Понятие – это форма мышления, в которой отражены существенные свойства объектов изучения. *Существенные (характеристические) свойства*– это такие свойства, каждое из которых необходимо, а все вместе достаточны для характеристики объектов, принадлежащих понятию.

> *Пример 1*. Понятие *треугольник*. Свойства понятия *треугольник*: 1) это многоугольник, 2) имеет три стороны, 3) имеет три угла, 4) сумма углов равна 180^0, 5) сумма длин любых двух сторон больше третьей стороны, 6) площадь равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности и т.д. Существенные свойства понятия *треугольник*: 1 и 2 или 1 и 3. Остальные свойства несущественные, т.е. это свойства, которые хотя и есть у объекта, но не характеризуют его и не дают возможности отличить его от других объектов.

Процесс конструирования понятий заключается в поиске такого числа необходимых условий, которое было бы достаточно для однозначного определения требуемого класса объектов. Не каждое необходимое условие является достаточным, не каждое достаточное условие является необходимым. Например, равенство двух углов является необходимым условием для того, чтобы эти углы были вертикальные, но не является достаточным.

Математические понятия отражают пространственные формы и количественные отношения действительности, абстрагированные от реальных ситуаций. Математические понятия образуются при помощи мыслительных операций анализа, синтеза, сравнения, обобщения, абстрагирования. Например, понятие *прямая* является результатом абстрагирования и обобщения таких реальных объектов, как натянутая нить, луч света, линия горизонта.

При образовании математических понятий широко используется такой метод познания как идеализация, заключающийся в наделении понятий некоторыми воображаемыми свойствами, отсутствующими у исходных объектов. Так, понятие *плоскости* в геометрии есть идеализация ровной, нигде не искривлённой реальной поверхности.

Каждое понятие может быть рассмотрено по содержанию и объему. *Содержание понятия*– это множество всех существенных свойств данного понятия. Например, содержание понятия *параллелограмм*: противоположные стороны равны; противоположные углы равны; противоположные стороны равны и параллельны; диагонали в точке пересечения делятся пополам и др.

Объем понятия– множество объектов, к которым применимо данное понятие. Например, объем понятия *параллелограмм*: собственно параллелограммы; ромбы; прямоугольники; квадраты.

Между содержанием и объемом понятия существует обратная связь: с увеличением содержания понятия уменьшается его объем; если уменьшить содержание этого понятия увеличится его объем. Например, увеличение содержания понятия *параллелограмм* на одно свойство «Диагонали взаимно перпендикулярны» сразу приводит к уменьшению его объема до ромба и квадрата. Уменьшение содержание понятия параллелограмм до одного свойства «Параллельность только двух противоположных сторон» увеличивает его объем, добавляется трапеция.

Если объем одного понятия содержится в объеме другого, то второе понятие называется *родовым* по отношению к первому понятию, а первое называется *видовым* по отношению ко второму.

Пример 2. Ромб – это параллелограмм, две смежные стороны которого равны. Родовым понятием выступает понятие параллелограмма, из которого определяемое понятие выделяется посредством одного видового отличия (равенство смежных сторон).

Объем понятия раскрывается с помощью *классификации.* Под классификацией понимают последовательное, многоступенчатое разделение множества на классы с помощью некоторого свойства.

Правильная классификация понятий предполагает соблюдение следующих условий: классификация проводится по определенному признаку, остающемуся неизменным в процессе классификации; понятия, получающиеся в результате классификации, – взаимно независимые; сумма объемов понятий, получающихся при классификации, равняется объему исходного понятия; в процессе классификации переходят к ближайшему в данном родовом понятии виду. Так, при правильно проведенной классификации получают всего семь видов возможных треугольников вместо девяти, полученных "формально" (прямоугольных равносторонних и тупоугольных равносторонних треугольников не существует).

Определение понятия – связное предложение (речевое или символическое), содержащее перечисление существенных свойств понятия. Существуют различные *виды определений* понятия.

1. *Через ближайший род и видовое отличие.* Этот вид определения предполагает: указание рода, в который входит определяемое понятие, и указание видовых отличий и связей между ними.

Требования, предъявляемые к определению понятия через ближайший род и видовое отличие:

– указано именно ближайшее родовое понятие;

– в качестве видового отличия названы не просто свойства определяемого понятия, а его существенные свойства;

– в качестве рода названо определенное ранее понятие;

– отсутствует «порочный круг» (тавтология) и связанная с ним возможность использования нововведенных терминов («Решение уравнения – это то число, которое является его решением»);

– соразмерность определяемому понятию: определение не должно быть «не доопределено» (названы не все видовые отличия) или «переопределено» (названы свойства, наличие которых может быть доказано);

– сопровождение каждое определения теоремой существования, в которой строго доказывается, что определяемый объект действительно существует;

– доказательство равносильности (эквивалентности) нескольких определений, данных одному и тому же понятию.

2. *Генетическое (конструктивное) определение* – вместо существенного свойства указывается процесс образования (или происхождения) определенного объекта. Генетические определения представляют собой разновидность определения через род и видовые отличия.

Пример 3. Пример генетического определения. Сферой называется поверхность, полученная вращением полуокружности вокруг своего диаметра.

3. *Индуктивное определение* указывает способ получения каждого следующего элемента определяемого класса объектов из каких-либо исходных элементов. Например, рекуррентные формулы, определяющие прогрессии.

4. *Аксиоматическое определение (косвенное определение через аксиомы)* задаёт понятие через выполнение определенных свойств, описанных в аксиомах. В курсе геометрии таковыми понятиями являются понятия точки, прямой, длины, площади. Аксиомы косвенно настолько определяют эти понятия, что их можно использовать в доказательствах.

Если изложение учебного материала не является аксиоматическим, то определение названных понятий дается *описанием*. Например, представление о множестве (совокупность объектов, объединенных каким-то признаком) даст множество деревьев в лесу, множество учащихся в классе, множество «двоек» в классном журнале и т.д.

5. *Условное определение*– это определение при помощи формул. Например, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n раз}}$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Выделяют два основных *способа введения нового понятия*:

1.Конкретно-индуктивный способ предполагает следующий порядок действий:

– рассмотрение конкретных практических примеров, показывающих целесообразность изучения понятия;

– выявление различных существенных и несущественных свойств понятия с использованием анализа, синтеза, сравнения, аналогии, обобщения и других мыслительных операций, используемых как методы математического исследования;

– введение термина, обозначающего понятие;

– отбор существенных свойств понятия и формулировка определения понятия;

– иллюстрация понятия конкретными примерами: модели понятия, контрпримеры;

– символическое обозначение понятия;

– формулировка других возможных определений понятия.

2. Абстрактно-дедуктивный способ предполагает следующий порядок действий:

– формулировка определения нового понятия;
– введение термина, обозначающего понятие;
– рассмотрение частных (и особых) случаев выражения понятия;
– проведение классификации понятия;
– иллюстрация понятия конкретными примерами;

– рассмотрение конкретных примеров приложения понятия.

Конкретно-индуктивный способ больше используется в младших классах. В старших классах чаще применяют абстрактно-дедуктивный способ.

Реализация конкретно-индуктивного способа требует больше учебного времени, но обеспечивает активность учащихся в получении нового знания. Кроме того, он позволяет наиболее полно осуществлять обратную связь, на основании которой учитель делает выводы об эффективности работы по изучению нового понятия.

Различные методы обучения могут быть использованы при введении нового понятия: частично-поисковые методы при конкретно-дедуктивном способе (учащиеся активно привлекаются к поиску нового определения); объяснительно-иллюстративные методы при абстрактно-дедуктивном способе (учитель сам вводит новое понятие).

2.10. Формы мышления в обучении математике. Суждения. Математические предложения. Аксиомы и теоремы. Структура и виды теорем. Умозаключения. Доказательства. Методика обучения доказательству теорем.

В логике выделяются такие формы мышления, как понятия, суждения и умозаключения. Понятия в мышлении не выступают разрозненно, они определенным образом связываются между собой. Формой связи понятий друг с другом является суждение.

Суждение – форма мышления, в которой утверждается или отрицается что-либо относительно предметов и явлений, их свойств и отношений; оно может быть истинным или ложным. В математике суждение называют математическим предложением.

Математические предложения либо принимаются за истинные без доказательства, и тогда являются *аксиомами*, либо их истинность устанавливается в процессе доказательства. В этом случае математическое предложение называется *теоремой*.

Структура теоремы. Теорема состоит из двух основных частей – условия и заключения; на языке логики $p \Rightarrow q$, где p – условие, q – заключение, $\Rightarrow$ знак следования. Для словесного выражения теоремы обычно используют две формы суждений – категорическую и условную.

Пример1. Формулировка теоремы Пифагора в категорической форме: «Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы».

Признак равенства треугольников в условной форме: «Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны».

Таким образом, в условной (импликативной) форме используется словесная модель "Если ... , то ...", которая с методической точки зрения значительно удобнее категорической: в ней уже выделены условие и заключение теоремы. Форма суждений достаточно легко меняется без изменения их содержания. Учителю следует упражнять учащихся в переводе категорической формы теоремы в условную.

Виды теорем. Имея некоторую теорему 1) $p \Rightarrow q$ и считая ее прямой, можно образовать следующие виды теорем: 2) $q \Rightarrow p$ – обратная, 3) $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$[2] – противоположная, 4) $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ – обратная противоположной.

Пример2. Теорема: Вертикальные углы равны.

Переведем категорическую форму в условную:

1) Если углы вертикальны, то они равны.
2) Если углы равны, то они вертикальны (обратная).
3) Если углы не вертикальны, то они не равны (противоположная).
4) Если углы не равны, то они не вертикальны (обратная противоположной).

Нетрудно убедиться, что теоремы 1 и 4, а также 2 и 3 равносильны (если истинна одна, то истинна и другая), чего не скажешь о других парах.

[2] $\overline{p}$ – отрицание p.

В школе изучаются только прямые и обратные теоремы. Учителю необходимо специально поработать над этими понятиями, так как учащиеся часто ссылаются на обратную теорему вместо прямой и наоборот (особенно часто так используют теоремы Виета и Пифагора и обратные им).

Теоремы можно классифицировать и по характеру их использования в математике, выделяя:1) *теоремы-свойства* – описывают свойства данного объекта; 2) *теоремы-признаки* – определяют условия, при которых объект относится к определенному классу объектов; 3) *теоремы существования* – утверждают существование объекта; 4) *теоремы единственности* – утверждают, что этот объект единственен. В школьном курсе геометрии практически не изучаются теоремы существования и единственности. Приведем примеры двух других видов теорем.

> *Пример 3.* Теорема-признак: «Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны».
>
> Теорема-свойство: «В равных треугольниках против равных сторон лежат и равные углы».

Эти два вида теорем играют очень большую роль в изучении математики, так как имеют различные функции. Не вдаваясь в тонкости этой классификации, учитель должен специально выделять теоремы-признаки, подчеркивая, что с их помощью можно определить, принадлежит ли фигура, обладающая теми или иными свойствами, к определенному классу фигур.

Доказательства теорем. Введем некоторые новые понятия. *Умозаключением* называется процесс получения нового суждения-вывода из одного или нескольких данных суждений. *Силлогизм* – это умозаключение, в котором на основании двух суждений (большей посылки и меньшей посылки) выводится третье суждение (вывод, заключение). Большая посылка – это некоторое общее суждение (аксиома, теорема, определение, допущение и т. д.); меньшая посылка – частное суждение.

*Пример4.*Если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (общее суждение). В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, BC = B_1C_1 (частное суждение).Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$ (новое суждение-вывод).

Доказательство – логическое действие, в процессе которого истинность какого-либо математического предложения обосновывается с помощью других предложений, признанных истинными. Это действие обычно представляет собой цепочку силлогизмов.

Методика обучения доказательству теорем. Доказательства подразделяются на *прямые* и *косвенные*. Прямое доказательство основано на каком-нибудь несомненном начале, из которого непосредственно устанавливается истинность теоремы. Методы прямого доказательства – синтетический, аналитический, метод математической индукции (практически не используется в школьном математическом образовании).

Синтетический метод: при построении цепочки силлогизмов мысль движется от условия теоремы к ее заключению. В учебниках приводятся чаще всего синтетические доказательства. Их преимущества – полнота, сжатость, краткость. Недостатки – отсутствие мотивации шагов, обоснования дополнительных построений; они носят значительно более формальный характер, чем аналитические доказательства.

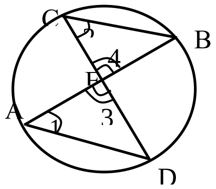
Аналитический метод: при поиске доказательства мысль движется от заключения теоремы к ее условию. Преимущества этого метода – есть отправное звено доказательства, дополнительные построения мотивированы, увеличивается творческая активность учащихся. Недостатки – большие потери времени, искусственные дополнительные построения трудно обосновать.

Пример5. Теорема о хордах окружности: Если две хорды окружности пересекаются, то произведения отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Дано: АВ и СД – хорды окружности, Е – точка их пересечения.

Доказать: АЕ·ВЕ = СЕ·ДЕ. (1)

Доказательство (синтетическое). Рассмотрим треугольники АДЕ и СВЕ. В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу ВМД, а углы 3 и 4 равны как вертикальные. По первому признаку подобия треугольников ΔАДЕ ~ ΔСВЕ. Отсюда следует, что $\frac{AE}{CE} = \frac{ДЕ}{BE}$ или АЕ·ВЕ = СЕ·ДЕ. Теорема доказана □.



Доказательство(аналитическое). Чтобы доказать равенство (1), достаточно показать, что $\frac{AE}{CE} = \frac{ДЕ}{BE}$(2).Для того, чтобы найти пропорцию (2), достаточно доказать подобие треугольников, стороны которых являются членами этой пропорции. Для получения таких треугольников соединяем точки С и В, А и Д.Чтобы обосновать верность пропорции (2), достаточно доказать, что ΔАДЕ ~ ΔСВЕ. Эти треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников: ∠1 = ∠2 как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу ВМД, а ∠3 = ∠4 как вертикальные. Следовательно, теорема верна.

Любое аналитическое доказательство обратимо в синтетическое и наоборот. Это широко используется в учебном процессе. Технологии могут быть таковы: 1) синтетическое доказательство предваряется аналитическими поисками его плана; 2) синтетическое доказательство заменяется аналитическим; 3) при использовании лекционного метода часто используется чисто синтетический метод доказательства.

Косвенное доказательство: истинность теоремы устанавливается посредством опровержения некоторых суждений, содержащихся в теореме. Наиболее распространенный и единственно применимый в курсе геометрии метод косвенного доказательства – *доказательство от противного*.

Можно предложить алгоритм доказательства от противного.

1. Допускаем, что заключение теоремы ложно. Тогда будет верно противоречащее ему утверждение.

2. Вычленяем возможные случаи.

3. Убеждаемся, что в каждом случае приходим к следствию, которое противоречит условию теоремы или ранее доказанному.

4. Наличие противоречия заставляет отказаться от принятого заключения. Признаем справедливость заключения доказываемой теоремы.

Мы охарактеризовали основные *логические методы* доказательства теорем. Можно говорить о *математических методах*. Так, в геометрии к базовым математическим методам можно отнести: 1) *метод геометрических преобразований*, который широко использовался в учебниках геометрии 70-х гг. прошлого века; 2) *метод равенства и подобия треугольников*, который является доминирующим в современных учебниках геометрии. Кроме базовых можно говорить о более частных математических методах доказательства теорем: методы симметрии, поворота, подобия; векторный, координатный, алгебраический методы и др.

Работа с конкретной теоремой включает в себя следующие этапы.

1. Подготовительный, включающий: а) при подготовке к уроку – выбор логического и математического методов доказательства теоремы; б) на уроке – актуализацию знаний, мотивацию необходимости изучения теоремы, в отдельных случаях – обеспечение формулирования теоремы учащимися.

2. Основной этап включает: а) формулировку теоремы, если она не была сформулирована на предыдущем этапе; б) перевод из категорической в условную форму, если это необходимо; выделение условия и заключения; в) анализ условия и заключения, поиск плана доказательства, т.е. цепочки силлогизмов, составляющих доказательство; г) реализация каждого шага плана; д) подведение итогов.

3. Заключительный этап – закрепление и применение теоремы для решения задач, в дальнейшем и для доказательства других теорем.

2.11. Правила и алгоритмы в обучении математике. Алгоритм. Свойства алгоритма. Развернутые и свернутые алгоритмы. Алгоритмы в школьном математическом образовании. Методика использования алгоритмов в процессе обучения математике.

Термин «алгоритм» происходит от имени знаменитого ученого, основателя первой математической научной школы средневековой арабской цивилизации, Аль-Хорезми. Благодаря его трудам, датируемым IX-Хвв., в Европе стали известны правила действий с числами в индо-арабской десятичной системе счисления, а также правила решения уравнений первой и второй степеней.

Значение алгоритмов в обучении математике определяется тем, что в процессе решения математических и практических задач большая роль принадлежит алгоритмам. Более того, алгоритмическая деятельность – один из наиболее распространенных видов деятельности человека.

Под *алгоритмом* понимают пошаговую программу действий, выполнение которых приводит к решению (в конечное число шагов) любой задачи из данного (обычно бесконечного) класса однотипных математических задач.

В школе для описания общего метода решения однотипных задач часто используются правила. Хорошим примером такого рода алгоритма являются правила выполнения арифметических действий, например, сложения «в столбик".

Алгоритмы обладают следующими общими *свойствами:*

1) свойство *массовости* означает, что алгоритм предназначен не для решения лишь одной задачи, а для решения любой задачи из класса однотипных задач;

2) свойство *детерминированности* означает, что алгоритм представляет собой строго определенную последовательность шагов, не оставляя никакой свободы выбора следующего шага;

3) свойство *результативности* означает, что решая с помощью данного алгоритма конкретную задачу из определенного класса задач, в конечное число шагов получаем результат; заметим, что количество шагов может оказаться различным.

Пример1. Задача распознавания взаимного расположения любых двух данных прямых в пространстве решается с помощью следующего алгоритма:

1) проверяем, лежат ли эти прямые в одной плоскости:
2) если нет, то они скрещиваются;
3) если да, то проверяем, имеют ли они общую точку;
4) если нет, то они параллельны;
5) если да, то они пересекаются.

Таким образом, при решении конкретной задачи, в которой требуется определить взаимное расположение двух прямых в пространстве, решение может быть получено как при выполнении только двух или четырех шагов алгоритма, так и при выполнении всех его шагов.

В школьном обучении математике достаточно редко алгоритмы представлены в *развернутом виде*, т.е. в виде пошаговой программы действий, как в только что рассмотренном примере. Значительно чаще они представлены в *свернутом виде*. Так, каждое правило, формула, определение заключает в себе алгоритм.

Пример2. Решение квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ представляется в виде формулы $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Алгоритм решения уравнения заключен в ней в свернутом виде. Однако его можно развернуть следующим образом:

1)вычислить дискриминант $D = b^2 - 4ac$;

2)если $D< 0$, то уравнение не имеет действительных корней;

3)если $D = 0$, то уравнение имеет единственный корень $x=\frac{-b}{2a}$;

4)если $D> 0$, то уравнение имеет два действительных корня

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

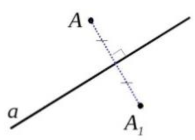
Обучение алгоритмической деятельности вначале предполагает развернутый ход рассуждений. В процессе дальнейшего обучения происходит объединение отдельных шагов в целостное действие, процесс рассуждений максимально свертывается.

В зависимости от того, какова цель использования алгоритма в школьном математическом образовании, можно различать *алгоритмы распознавания* и *алгоритмы преобразования*.

Если цель использования алгоритма – выполнить действие или преобразовать выражение, то такой алгоритм называется *алгоритмом преобразования.* Так, алгоритмами преобразования являются приведенные здесь примеры алгоритмов выполнения арифметических действий и решения квадратного уравнения. Алгоритмы преобразования в школьном курсе математики чаще всего заключены в правилах и формулах. Например, в правиле округления десятичных дробей содержится соответствующий алгоритм преобразования, который можно развернуть в пошаговую программу действий. В примере 2 мы развернули формулу нахождения корней квадратного уравнения в пошаговую программу действий.

Если же цель использования алгоритма в обучении математике – определить, к какому классу математических понятий принадлежит данное понятие, то такой алгоритм называется *алгоритмом распознавания*. В примере 1 как раз рассматривается такого рода уже развернутый алгоритм. Однако чаще всего алгоритмы распознавания заключены *в определениях понятий* в свернутом виде.

Пример 3. Определение: Две точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой a, если эта прямая перпендикулярна отрезку AA_1 и проходит через его середину.



В этом определении содержится алгоритм распознавания пары симметричных точек. Сформулируем его в виде пошаговой программы действий.

1. Проведем отрезок AA_1.

2. Определим, является ли прямая, содержащая отрезок A_1, перпендикулярной прямой a.

3. Если нет, то точки A и A_1 несимметричны.

4. Если да, то сравним длины отрезков, на которые прямая a разделила отрезок AB.

5. Если они не равны, то точки A и B несимметричны относительно прямой a.

6. Если они равны, то точки A и B симметричны относительно прямой a.

Кстати, отсюда легко следует и способ построения точки, симметричной данной.

Часто работу с алгоритмами противопоставляют творческой деятельности, считая ее механической, работой «по шаблону». Однако алгоритмическая деятельность впрямую развивает такие качества мышления, как систематичность и последовательность. Кроме того, с одной стороны, выполнение любой, даже творческой деятельности, включает в себя выполнение некоторого набора алгоритмических операций. С другой стороны, работу с алгоритмом можно организовать таким образом, чтобы развивать мышление обучаемых.

Работа с конкретным алгоритмом включает в себя три основных этапа: 1) введение алгоритма, 2) усвоение алгоритма, 3) применение алгоритма.

На первом этапе очень важна мотивация изучения алгоритма. На примере решения задачи или выполнения однотипных упражнений необходимо показать, что каждый раз мы выполняем одну и ту же последовательность действий, поэтому целесообразно сформулировать единое правило выполнения действий во всех аналогичных ситуациях. Таким образом, обучаемые проводят анализ, сравнение, обобщение, развивая мышление. Такой способ введения алгоритма можно назвать *содержательным*. Во многих случаях обучаемые в состоянии самостоятельно сформулировать алгоритм при большей или меньшей помощи учителя.

Иногда алгоритм формулируется самим учителем, тогда способ введения алгоритма можно назвать *формальным*. В этом случае очень важно показать его применение на достаточном количестве примеров. Формальный способ введения алгоритма позволяет формировать такой элемент алгоритмической культуры, как умение выполнять формальные предписания, которые важны практически во всех видах человеческой деятельности.

Усвоение алгоритма происходит в процессе выполнения значительного количества упражнений, сложность которых постепенно увеличивается. Применение алгоритма в процессе решения все более сложных задач обеспечит овладение конкретным алгоритмом, умение увидеть его в общем плане решения задачи.

2.12. Задачи в обучении математике. Понятие задачи, ее структура. Роль и функции задач в обучении математике. Классификации задач. Упражнения. Методика обучения решению математических задач.

До настоящего времени в литературе не существует единого определения понятия «задача». Вероятно, это связано с тем, что этот термин используется в различных областях достаточно далеких друг от друга. Однако в зависимости от науки, в рамках которой рассматривается трактовка данного понятия, можно выделить некоторые основные подходы к нему. Так, например, в психологии *задачу* рассматривают: 1) как цель, заданную в определенных условиях; 2) как определенную систему, основными компонентами которой являются предмет задачи и модель требуемого состояния этого предмета; 3) как модель проблемной ситуации. Наряду с термином «задача» в литературе также используется термин «упражнение». Под *упражнением* чаще всего понимают задачу, метод решения которой уже известен ученику и, решая ее, он совершенствует свои навыки в решении задач этого типа. Термин «задача» чаще всего используется в курсе геометрии, а термин «упражнение» - в курсе алгебры. Часто в методике обучения математике используют термин «задача» для обозначения и задач и упражнений.

В процессе обучения математике учащиеся решают достаточно большое количество задач, отличающихся друг от друга по характеру требований, содержанию, основной дидактической цели и т.д. Но всех их объединяет общая *структура*. В структуре задачи выделяют следующие основные компоненты: 1) *условие задачи* – предметная область задачи (объекты) и отношения между объектами; 2) *требование (заключение) задачи* – указание цели задачи, требование отыскать неизвестный компонент, доказать, сконструировать и т.д. 3) *обоснование (базис) задачи*– теоретические или практические основы перехода от условия к заключению; 4) *решение задачи* – совокупность действий (операций), которые надо произвести над известными компонентами, чтобы выполнить требование задачи. Проиллюстрируем вышесказанное на примере.

*Пример 1.*Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч.

Условие задачи. В задаче речь идет о лодке, которая проплывает между двумя пристанями туда и обратно (по и против течения реки) за разное время. Лодка имеет собственную скорость или скорость в неподвижной воде. В задаче явно заданы значения следующих величин: расстояния между пристанями – 112 км, собственная скорость лодки – 11 км/ч, разница между временем движения лодки против течения реки и по течению реки – 6 часов.

Требование задачи. Требование задачи состоит в определении числового значения скорости течения реки.

Обоснование задачи. В задаче используются следующие соотношения:

1) соотношения между собственной скоростью лодки, скоростью течения и скоростью лодки по течению и против течения:
$v_{\text{по теч.}} = v_{\text{лодки}} + v_{\text{теч.}}, v_{\text{против теч.}} = v_{\text{лодки}} - v_{\text{теч.}}$;
2) соотношение-зависимость между временем движения, расстоянием и скоростью: $t = \frac{s}{v}$;
3) соотношение-зависимость между временем движения лодки по течению и против течения $t_{\text{против теч}} - t_{\text{по теч}} = 6$;
4) основные свойства эквивалентности уравнений и их следствия.

Решение задачи. Решение задачи состоит в составлении уравнения
$\frac{112}{11-x} - \frac{112}{11+x} = 6$ и в последовательных его преобразованиях.

Роль задач в обучении математике невозможно переоценить. С одной стороны, математические задачи являются одной из главных составляющих содержания учебного предмета математики, который включает в себя также и теоретический материал. С другой стороны, теоретический материал усваивается в процессе решения задачи. Поэтому решение задач является основной деятельностью при обучении математике.

Решение любой математической задачи в процессе обучения многофункционально. Ведущие функции задач определяются целями обучения математике на данном этапе образования. В соответствии с этим на современном этапе выделяют следующие функции задач в обучении: 1) *обучающие* – те, которые направлены на формирование системы специальных математических (вычислительных, измерения и сравнения простейших величин, процентных вычислений, геометрических построений и т.д.) и общеучебных (читать, писать, пользоваться учебной и справочной литературой, аккуратно выполнять свои записи т.д.) знаний, умений и навыков; 2) *воспитывающие* – те, которые направлены на воспитание у обучаемых интереса к математике, высоких моральных качеств, характера, волевых качеств, общей культуры, формирование научного мировоззрения, их эстетическое воспитание; 3) *развивающие* – те, которые направлены на развитие мышления учащихся, овладение приемами наиболее эффективной умственной деятельности обучаемого; 4) *контролирующие* – те, которые направлены на осуществление внешнего и внутреннего контроля за уровнем овладения учащимися учебным материалом и уровнем сформированности их познавательных интересов на разных этапах обучения.

Существуют различные подходы к классификации задач, которые учитывают метод решения задачи, функции задач в обучении, характер требований в задаче и т.д. Очевидно, что любая классификация является условной. Например, одна и та же задача может быть и задачей на доказательство и задачей на построение. Ситуация усугубляется, если принять во внимание большое количество задач. Тем не менее, в школьной практике чаще всего задачи классифицируют: 1) *по математическому содержанию*: арифметические, алгебраические, геометрические, тригонометрические и т.д.; 2) *по методу решения*: арифметические, алгебраические, графические, геометрические, комбинированные и т.д.; 3) *по характеру требований*: задачи на вычисление, доказательство, объяснение, преобразование, построение, конструирование и т.д.; 4) *по специфике языка*: текстовые, сюжетные, абстрактные; 5) *по степени проблемности*: стандартные, обучающие, поисковые, проблемные и т.д.

В методике обучения математике процесс решения задачи традиционно делится на четыре основных этапа: *анализ задачи, поиск решения задачи, реализация плана решения с обоснованием и проверка решения задачи*. Уделим внимание каждому этапу.

Анализ задачи. На этом этапе выявляются и переформулируются на язык математики (если это необходимо) условие и требование задачи, устанавливаются объекты, указанные в задаче, характеризуется каждый из них, рассматривается связь между ними, осуществляется поиск явно или неявно заданных их свойств. Определяется какие количественные характеристики известны, какие можно найти в дальнейшем. При этом происходит разбиение задачи на отдельные элементарные условия и требования, выявляется структура задачи. Результаты проведенного анализа оформляются в виде краткой (схематической) записи, которая выполняется словесно или в виде рисунка, таблицы, схемы, чертежа, диаграммы и т.д. Критерий эффективности краткой записи: 1) наглядное представление связей между величинами и соответствующими числовыми данными; 2) способность ученика самостоятельно воспроизвести условие задачи; 3) возможность использования для поиска решения задачи.

Поиск решения задачи. Этот этап считается наиболее сложным. Здесь прослеживается связь между отдельными элементами условия, выдвигаются гипотезы, отыскиваются их обоснования, выявляются теоретические положения, которые могут быть применимы к решению задачи, определяются виды математических преобразований, полезных в данном случае, фиксируются частные исходы. На протяжении всего этапа выполняется попытка подвести задачу под известный тип и выбрать наиболее приемлемый в данных условиях метод решения. Выбор метода решения зависит от характера и особенностей решаемой задачи, от знаний и умений самого учащегося. В результате этой работы должна быть определена последовательность необходимых действий с данными задачи, которая приведет к выполнению требования задачи, т.е. фиксируется план решения задачи.

Реализация плана решения с обоснованием. На этом этапе происходит реализация плана решения во всех его деталях, осуществляется выбор способа оформления решения. Так, например, в случае арифметического способа решения задача сводится к выполнению ранее намеченных действий или вычислений по известной формуле. При этом могут быть использованы следующие способы оформления решения: 1) по действиям с вопросами; 2) по действиям с пояснениями; 3) по действиям без пояснений; выражением и т.д.

Проверка решения задачи. На этом этапе необходимо убедиться, что полученный результат удовлетворяет всем требованиям задачи. Для этого выполняется проверка существования объектов с полученными свойствами, правильность выполнения логических и математических операций. Здесь же проводится исследование задачи, которое включает в себя поиск путей рационализации решения, изучение особых и частных случаев, составление и решение обратной задачи. Необходимо понять, какие новые знания и опыт, умения и навыки получены при решении задачи, систематизировать и обобщить их и использовать в дальнейшем при решении задач.

2.13. Организация обучения математике. Урок как основная форма обучения математике. Структура урока математики. Типы уроков математики. Основные требования к уроку математики.

Основной формой организации обучения математике является урок.

Урок – это логически законченный, целостный, ограниченный определенными рамками времени отрезок учебно-воспитательного процесса, в котором учебная работа проводится с постоянным составом учащихся примерно одинакового возраста и уровня подготовки. Урок может быть представлен как динамичная и вариативная форма организации процесса целенаправленного взаимодействия учителей и учащихся, в которой находятся в тесной связи все основные элементы учебно-воспитательного процесса: цели, содержание, средства, методы, организация.

Тогда признаками понятия «урок» можно считать следующие:

– на каждом уроке решаются определенные образовательные, развивающие и воспитательные цели;

– эти цели достигаются через рассмотрение конкретного учебного материала;

– для достижения целей подбираются подходящие методы и средства обучения;

– коллектив учащихся класса определённым образом организуется на работу.

Специфические особенности урока математики:

– содержание урока математики обусловлено строгой логикой построения курса математики и опирается на ранее изученное, подготавливая базу для усвоения нового;

– урок математики создает условия для обеспечения необходимой каждому ученику базовой математической подготовки;

– эффективность уроков математики во многом обусловлена междисциплинарным характером математических знаний;

– урок математики обладает высоким потенциалом для развития логического мышления, умений рассуждать и доказывать;

– на уроке математики придается большое значение практической деятельности учащихся для усвоения математических знаний.

Всякий урок включает в себя различные компоненты, то есть обладает определенной структурой, в том числе урок математики. Общая дидактическая *структура урока математики* включает следующие компоненты:

– актуализация прежних математических знаний и способов действий;

– формирование новых математических знаний и способов действий;

– их применение, т.е. формирование математических умений.

Существуют многочисленные классификации уроков математики. Основной классификацией является выделение типов уроков по основной дидактической цели. *По основной дидактической цели* выделяют:

– урок ознакомления с новым материалом;

– урок закрепления изученного;

– урок применения знаний и умений;

– урок обобщения и систематизации знаний;

– урок проверки и коррекции знаний и умений;

– комбинированный урок.

Дидактическая цель обуславливает структуру каждого из перечисленных типов уроков. Например, <u>урок ознакомления с новым материалом</u> в соответствии с основной дидактической целью (введение математических понятий, установление свойств, построение правил, математических алгоритмов) содержит следующие этапы:

1) сообщение темы, цели и задач урока;
2) мотивация учебной деятельности;
3) актуализация прежних знаний и способов действий;
4) ознакомление с новым материалом;
5) первичное осмысление и закрепление изученного;

6) постановка домашнего задания;
7) подведение итогов урока.

Урок закрепления изученного имеет структуру, соответствующую основной дидактической цели – формирование умений. Его этапы:

1) проверка домашнего задания;
2) актуализация опорных знаний;
3) сообщение темы, цели и задач урока;
4) мотивация учебной деятельности;
5) воспроизведение изученного и его применение в стандартных условиях;
6) перенос приобретенных знаний и их первичное применение в новых или измененных условиях с целью формирования умений;
7) подведение итогов урока;
8) постановка домашнего задания.

Кроме вышеперечисленных типов уроков приведем примеры *нетрадиционных форм* проведения уроков математики.

Уроки в форме соревнований и игр: конкурс, турнир, эстафета, дуэль, КВН, деловая игра, ролевая игра, кроссворд, викторина и др.

Урок с элементами историзма: урок об ученых, урок – исторический обзор, урок-портрет и др.

Уроки, напоминающие публичные формы общения: пресс-конференция, брифинг, бенефис, дискуссия, диспут, общественный смотр знаний и др.

Уроки, основанные на имитации деятельности учреждений и организаций: следствие, патентное бюро, судебное заседание и др.

Трансформация традиционных способов организации урока: парный опрос, экспресс-опрос, урок-защита оценки, урок-консультация, урок-практикум, урок-семинар, урок-тест и др.

Уроки, основанные на формах, жанрах и методах работы, известных в общественной практике: исследование, мозговая атака, рецензия, творческий отчет и др.

При подготовке к уроку математики учитель руководствуется основными *требованиями*, предъявляемыми к уроку:

Целенаправленность. Среди всей совокупности учебных целей, реализуемых на уроке математики, необходимо выявить основную и подчинить ей все другие цели.

Рациональное построение и дифференциация содержания. Математическое содержание должно соответствовать основной учебной цели урока, содержать достаточный по объему учебный материал. Дифференциация содержания подразумевает его специализацию для различных групп обучаемых – по уровню достижений или по области интересов.

Обоснованный выбор средств, методов и приемов, ориентированных на обучение, развивающих личность. При выборе методов учитель учитывает планируемые образовательные результаты обучения, возрастные особенности учащихся, уровень их развития и способностей, предполагаемый набор средств обучения.

Организация продуктивной учебной деятельности учащихся на уроке с учетом их интересов, наклонностей и потребностей. Продуктивная учебная деятельность может осуществляться благодаря предоставленной учителем обучаемым возможности самим формулировать познавательную задачу, на основе выявления существенных признаков давать определении математическому понятию, с помощью опыта обнаруживать существенную закономерность и облекать её в форму суждения, находить с помощью учителя план доказательства или решения математической задачи, по возможности самостоятельно реализовывать этот план.

Использование гуманитарного потенциала математического образования. Данное требование к уроку предполагает использование на уроке исторических сведений о математике и математиках, фактов, связанных с математикой, из таких областей человеческих знаний как архитектура, живопись, литература, музыка и др.

Мотивация учения и формирование у обучаемых умений учиться математике. Учителю следует заботиться о том, чтобы у школьника сформировался учебно-познавательный мотив. Он может помочь школьникам самостоятельно сформулировать цели. Тогда возникнет интерес к учению, который в дальнейшем будет способствовать формированию мотивов самообразования.

2.14. Организация обучения математике. **Подготовка учителя к уроку математики. Организация самостоятельной работы на уроках математики. Анализ урока математики.**

В процессе разработки уроков математики можно выделить два этапа: предварительный и непосредственный.

Предварительный этап связан с подготовкой учителя к новому учебному году и с построением системы уроков по изучаемой теме, а *непосредственный*– с разработкой очередного урока.

<u>Предварительный этап подготовки к уроку</u>

На первом этапе изучаются и анализируются стандарт среднего математического образования, учебные планы, программы и учебники по математике для общеобразовательных учреждений, уточняется перечень необходимой учебно-методической литературы и учебного оборудования, конкретизируется календарный план, проводится логико-дидактический анализ учебных тем, продумывается система повторения изученного материала, выявляются пути реализации внутрипредметных и межпредметных связей, намечаются системы уроков по каждой теме. Соотнося получаемые результаты с возможностями обучающихся и состоянием их знаний и умений, учитель завершает предварительный этап планированием процесса обучения.

Непосредственная разработка урока математики

Современный этап развития образования характеризуется обращением к личности обучаемого, изменением представления о сущности готовности человека к выполнению им социальных и профессиональных задач, в связи с чем, были разработаны и внедрены новые федеральные государственные образовательные стандарты, требования которых необходимо учитывать учителю при подготовке к уроку.

Основными этапами непосредственной подготовки учителя к уроку являются:

Постановка целей урока. Основной целью образовательного процесса, согласно ФГОС, является овладение учащимися личностными, метапредметными и предметными результатами, первые два их которых выступают в учебном процессе в качестве универсальных учебных действий. Внимание также должно быть уделено формированию компетенций учащихся.

Отбор содержания урока. Поставленные учителем цели непосредственным образом влияют на отбор содержания материала учебника, относящегося к теме урока. Система отбора содержания материала к уроку должна включать следующие действия учителя:

1. Основательно изучить содержание пункта, пунктов, (параграфа) учебника, относящегося к теме урока. Выделить все компоненты математического содержания, определив их место и роль в теме. Осуществить их логико-математический анализ.

2. Решить все задачи из учебника, проанализировать и распределить их по блокам, классифицировать.

3. Привести содержание учебного материала в соответствие с требованиями стандарта, программы и рекомендаций, изложенных в учебно-методических пособиях. Ознакомиться и подобрать различные системы дополнительных заданий и материалов.

4. Учесть направления организации содержания материала, разработанные при тематическом планировании.

5. Выделить в содержании урока самое главное, чтобы скомпоновать вокруг него весь используемый материал.

6. Дифференцировать содержание учебного материала с целью интенсификации самостоятельной познавательной деятельности наиболее подготовленных учащихся и активизации помощи слабоуспевающим.

7. Привести отобранное содержание урока в соответствие со временем, отводимым на его проведение.

Выбор методов обучения. В системе действий учителя при разработке урока вслед за определением его целей и содержания важное место отводится выбору методов обучения, которыми называют способы упорядоченной взаимосвязанной деятельности учителя и учащихся, направленные на достижение поставленных целей.

Определение структуры урока. На завершающем этапе разработки урока определяется его структура, являющаяся совокупностью различных вариантов взаимодействий между элементами (компонентами, этапами) урока, возникающая в процессе обучения и обеспечивающая его целенаправленную действенность.

В результате разработки урока математики определяются его тема, цели, тип, содержание, методы и средства обучения, последовательность и продолжительность его этапов, предназначенных для проверки математических знаний и умений и организации других видов учебной деятельности учащиеся. Все эти сведения оформляются в виде технологической карты урока. Пример такой карты приведен в таблице.

<table>
<tr><td>Предмет</td><td colspan="2"></td><td>Класс</td><td></td></tr>
<tr><td>Тема, тип, вид урока</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="5">Планируемые образовательные результаты</td></tr>
<tr><td colspan="2">предметные</td><td colspan="2">метапредметные</td><td>личностные</td></tr>
<tr><td colspan="4">Решаемые учебные проблемы</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Основные понятия, изучаемые на уроке</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Вид используемых на уроке средств ИКТ</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Методическое назначение средств ИКТ</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Аппаратное и программное обеспечение</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Образовательные интернет-ресурсы</td><td></td></tr>
</table>

Организация самостоятельной работы на уроках математики

Одним из методов организации и осуществления учебно-познавательной деятельности является самостоятельная работа учащихся.

Под самостоятельной работой понимают – работу, выполняемую учащимися по заданию учителя, без его непосредственного участия, но под его руководством, в специально предоставленное для этого время. Для ее выполнения учащиеся должны приложить усилия, выражая результаты своих действий.

Распространены следующие подходы к классификации самостоятельных работ:

– *по дидактическим целям* (обучающие и контролирующие);

– *по уровню самостоятельности* учащихся (по образцу, реконструктивно-вариативные, частично поисковые (эвристические), исследовательские (творческие));

– *по степени индивидуализации* (общеклассные; групповые; индивидуальные);

– *по источнику и методу приобретения знаний* (работа с книгой, электронными образовательные ресурсами, поиск информации в электронных справочных изданиях, решение и составление задач, лабораторные и практические, подготовка докладов, рефератов);

– *по форме выполнения* (устные и письменные);

– *по месту выполнения* (классные и домашние).

Требования к самостоятельной работе:

1. Самостоятельная работа должна носить целенаправленный характер.
2. Самостоятельная работа должна быть действительно самостоятельной и побуждать ученика при ее выполнении работать напряженно.
3. На первых порах у учащихся нужно сформировать простейшие навыки самостоятельной работы.
4. Далее для самостоятельной работы нужно предлагать такие задания, выполнение которых требует применения знаний в новой ситуации.
5. В организации самостоятельной работы необходимо осуществлять дифференцированный подход к учащимся.
6. Самостоятельные работы учащихся необходимо планомерно и систематически включать в учебный процесс.
7. При выполнении учащимися самостоятельных работ любого вида руководящая роль должна принадлежать учителю.

Методика проведения самостоятельной работы. В четком инструктаже учителя для учащихся должны быть отражены следующие аспекты:

– цель самостоятельной работы;
– характеристика содержания;
– способы выполнения;
– формы выражения получаемых результатов;
– продолжительность выполнения;

– критерии оценки.

Анализ урока математики. В целях профессионального совершенствования деятельности учителя необходимо осуществлять наблюдение и анализ его работы. К видам посещения урока относят взаимопосещения, посещения администрацией, открытые уроки, посещения студентами и др.

При посещении и анализе урока желательно соблюсти следующие рекомендации:

1. Предварительно выяснить цель урока, внимательно ознакомиться с программой анализа урока математики, подготовить бланк для записи протокола урока.

2. Во время посещения урока категорически запрещается в какой-либо форме вмешиваться в его ход, высказывать свои замечания, пожелания и др.

3. Как можно подробнее вести протокол урока (основной ход урока с необходимыми комментариями и выводами).

4. Перед обсуждением урока следует специально подготовиться к анализу (просмотр записей, новые пометки, соотнесение записей с программой анализа).

5. Начинается анализ с краткого «самоанализа» учителя. После этого возможна небольшая беседа по выяснению непонятных вопросов.

6. При анализе урока необходимо руководствоваться основными его принципами: доброжелательный тон анализа; объективный и конструктивный характер анализа (должны быть предложены реальные варианты улучшения урока); научный характер анализа – с позиций современных научно-педагогических достижений.

Программа наблюдения и анализа урока математики. Рекомендуется придерживаться следующего плана оформления анализа.

1. Тема и тип урока.
2. Цели и задачи урока:
   - как сформулированы учителем;
   - как доведены до учащихся (четкость, конкретность);
   - соответствие типу урока.
3. Структура урока:
   - характеристика структурных компонентов;
   - оправданность их выбора;
   - распределение времени между этапами, темп урока.
4. Организационная деятельность учителя:
   - организация класса в начале урока и в конце урока;
   - поддержание дисциплины в течение урока, методы и приемы, применяемые с этой целью;
   - распределение внимания между классом, группами учащихся и отдельными учениками.
5. Коммуникативная деятельность учителя:
   - контакт с классом, создание атмосферы сотрудничества на уроке;
   - знание особенностей класса и отдельных учеников;
   - соблюдение педагогического такта;
   - речь учителя, работа над речью учащихся.
6. Методическая деятельность учителя:

а) отбор математического содержания:

- характеристика теоретического материала (новые понятия, математические предложения и др.); характер задач и упражнений; соотношение практического и теоретического материала;

– соответствие объема и сложности материала познавательным возможностям учащихся;

– связь с предшествующим и последующим материалом;

b) методика работы над математическим содержанием: изучение новых понятий, обучение доказательству теорем, работа с законами и алгоритмами, обучение решению задач и упражнений;

c) выбор форм, методов и средств обучения: характеристика и обоснование выбора методов, целесообразность применения технических и наглядных средств обучения, рациональность использования классной доски; сочетание общеклассных, групповых и индивидуальных форм обучения;

d) организация самостоятельной работы учащихся: виды самостоятельных работ, формы их проведения; дифференциация заданий;

e) контроль и оценка знаний и умений учащихся: формы и методы контроля, обоснованность их выбора, результативность; оценка знаний и умений учащихся, обоснованность выставления отметок, их стимулирующая роль.

7. Общие выводы и предложения:

– качество реализации целей урока;
– подготовленность учителя к уроку, умение реализовать план;
– математическая грамотность учителя;
– предложения по совершенствованию урока.

2.15. Контроль качества обучения математике. Виды и функции контроля. Оценка и отметка. Контрольная работа, анализ результатов. Методика проверки и оценки знаний, умений и навыков учащихся. Основной государственный экзамен. Единый государственный экзамен.

Под *контролем* знаний понимают процесс выявления и сравнения результатов учебной деятельности с требованиями, определенными в учебной программе. Основу объективной оценки результатов обучения составляют стандарты по математике, характеризующие то, что должен знать и уметь каждый ученик.

По ***типам***, в первом приближении, принято выделять *внешний, взаимный* и *самоконтроль*. По ***видам***: *входной, текущий, рубежный* и *итоговый*. По ***способам***: *письменный, устный, практический*. По ***форме***: *массовый* (фронтальный опрос, зачет, экзамен, математический диктант, контрольная работа и др.) и *индивидуальный* (опрос у доски, зачет, экзамен, индивидуальная работа по карточкам и др.).

Входной контроль позволяет учителю оценить степень готовности учащихся к восприятию планируемого к изучению материала. Опираясь на его результаты учитель может спланировать личностно-ориентированное обучение и индивидуализировать образовательный процесс.

Текущий контроль позволяет определить уровень усвоения нового материала, степень самостоятельности учащихся при решении задач, характер применения рациональных способов решения задач и др. Для текущего контроля можно использовать представленные ниже в таблице методы контроля.

Рубежный контроль проводится после завершения темы, раздела, учебного курса.

Итоговый контроль проводится по завершению изучения курса математики основной или старшей школы, в частности в виде основного государственного экзамена (ОГЭ, 9 класс) и единого государственного экзамена (ЕГЭ, 11 класс).

Методы контроля в учебном процессе

Устный контроль

- Фронтальный опрос
- Индивидуальный опрос

Письменный контроль

- Математический диктант
- Самостоятельная работа
- Контрольная работа
- Реферат
- Тест

Практический контроль

- Фронтальная или индивидуальная контрольная работа
- Домашняя контрольная работа
- Исследовательская работа
- Лабораторная работа
- Практическая работа
- Проектная работа

Основными ***функциями*** контроля являются:

•информационная (выявление результатов ученика на каждом этапе обучения, его готовности к дальнейшему обучению, развитие способностей и т.п.);

•диагностическая (выявление причин полученных образовательных результатов);

•образовательная (способствует систематизации знаний, формированию приемов учебной работы);

•мотивационная (поощряет образовательную деятельность ученика, стимулирует её);

•воспитательная (формирует самосознание, адекватную самооценку, личностные качества);

•прогностическая (обеспечивает коррекцию и управление процессом усвоения знаний и умений).

Оценкой называют как сам процесс, действие оценивания, так и результат этого действия. Оценка может быть вербальной, символической и эмоциональной. Одним из количественных результатов оценивания является ***отметка***, которая может быть представлена в традиционной пятибалльной форме, либо местом в рейтинге, процентом выполнения, «буквенной» характеристикой или др. На оценку и отметку влияют допущенные учеником погрешности, которые условно делят на ошибки и недочеты. *Ошибка* – погрешность, свидетельствующая о не овладении учеником знаниями и умениями, определенными программой. *Недочет* – погрешность, указывающая на отсутствие знаний, которые программой не относятся к основным (неаккуратная запись, небрежный чертеж, оформление решения задачи и т.п.).

Основной формой рубежного контроля по математике является письменная *контрольная работа*. ***Анализ результатов*** контрольной работы может способствовать получению выводов об особенностях деятельности учителя по организации усвоения учебного материала учащимися и совершенствованию методических умений учителя. Выделяют количественный и качественный анализы контрольной работы по математике.

Количественный анализ результатов контрольной работы характеризует общую картину усвоения классом изученного материала и может быть выполнен в следующей таблице:

Класс	Кол-во учеников	Из них писали к/р	Отметки				Правильно выполненные задания				Средний балл	% качества	% успеваемости	Степень обученности класса
			5	4	3	2	1	2		N				

Средний балл вычисляется как среднее арифметическое оценок всех учеников; % качества – это процент количества учащихся, получивших за контрольную работу отметки «5» и «4»; % успеваемости – это процент количества учащихся, получивших за контрольную работу отметки «5», «4» и «3». Степень обученности класса вычисляется по формуле:

$$\text{СОК} = \frac{n_5 \cdot 100 + n_4 \cdot 64 + n_3 \cdot 36 + n_2 \cdot 16}{n}$$

где n – количество учеников писавших контрольную работу, а n_5, n_4, n_3, n_2 – число учащихся, получивших отметки «5», «4», «3» и «2» соответственно.

Качественный анализ результатов контрольной работы позволяет оценить индивидуальные достижения учащихся.

ФИО ученика	Усвоенные знания и умения				Общая отметка
	1	2	…	N	

Основной государственный экзамен (он же — ГИА-9) — основной обязательный вид экзамена в 9 классе, который был введен в 2002 году. Служит для контроля знаний, полученных учащимися за все время обучения, а также для приёма в учреждения среднего профессионального образования (колледжи и техникумы).

Тест ГИА по математике разделен на три части: «Алгебра», «Геометрия» и «Реальная математика». Первая часть – задания базового типа сложности с выбором одного правильного ответа из предложенных, на решение

20 задач отводится 90 минут по истечению которых первая часть сдается. Вторая часть – задачи повышенного уровня сложности, требуют подробного решения и ответа, в них находятся задания только по Алгебре и Геометрии, на 6 задач дается 150 минут.

На экзамене разрешено использовать: таблицу квадратов двузначных чисел; формулы корней квадратного уравнения, разложения на множители квадратного трехчлена, формулы n-го члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий. Калькулятор на экзамене не используется.

Минимальный балл (соответствует тройке) – 8 баллов, набранные в сумме за выполнение заданий всех трёх модулей, при условии, что из них не менее 3 баллов по модулю «Алгебра», не менее 2 баллов по модулю «Геометрия» и не менее 2 баллов по модулю «Реальная математика». Максимальный бал – 38.

Общая оценка за экзамен в аттестат не выставляется, выставляются лишь отдельные оценки за алгебру и геометрию.

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) — экзамен централизованно проводимый в средних учебных заведениях РФ по образовательным программам среднего общего образования. Служит одновременно выпускным экзаменом из школы и вступительным экзаменом в вузы. При проведении экзамена на всей территории России применяются однотипные задания и единые методы оценки качества выполнения работ. После сдачи экзамена результаты всех учащихся попадают в специализированную базу, доступ к которой имеется у вузов. С 2009 года[3] ЕГЭ является единственной формой выпускных экзаменов в школе и основной формой вступительных экзаменов в вузы, при этом есть возможность повторной сдачи ЕГЭ в последую-

[3]В Ростовской области начал проводиться в качестве эксперимента с 2001 года.

щие годы. При проведении ЕГЭ используются контрольные измерительные материалы (КИМ), представляющие собой комплексы заданий стандартизированной формы, а также специальные бланки для оформления ответов на задания.

С 2015 года ЕГЭ по математике решено проводить на двух уровнях: базовом и профильном. Для получения аттестата об окончании школы достаточно сдать экзамен по математике на базовом уровне, подтвердив уровень владения «математикой для жизни». Вузы, принимающие результаты ЕГЭ, будут принимать только результаты, полученные при сдаче экзамена на профильном уровне.

Экзамен *базового уровня* содержит 20 заданий для которых требуется указать ответ. На выполнение работы отводится 180 минут. Экзамен *профильного уровня* содержит 21 задание, из которых 9 базового уровня сложности составляют первую часть, а следующие 12 заданий относятся ко второй части и нацелены на оценку овладения математикой на профильном уровне обучения. Задания 1-14 предполагают краткий ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби, а задания 15-21 требуют развернутого решения. На выполнение работы отводится 235 минут.

На базовом уровне ЕГЭ принята пятибалльная шкала оценки, а на профильном уровне 100 бальная оценка.

***2.16. Профилизация в обучении математике.* Уровневая и профильная дифференциация обучения. Предпрофильное обучение математике. Профильные школы и классы. Содержание обучения математике в профильных школах и классах.**

Дифференциация обучения – система обучения, при которой каждый ученик, овладевая некоторым минимумом общеобразовательной подготовки, получает право и гарантированную возможность уделять преимущественное внимание тем направлениям, которые в наибольшей степени отвечают его склонностям. *Цель дифференциации обучения* – обеспечить каждому ученику условия для максимального развития его способностей, склонностей, удовлетворения познавательных потребностей и интересов в процессе овладения им содержания общего образования. Принято различать два основных типа дифференциации обучения по содержанию: профильную и уровневую.

Уровневая дифференциация выражается в том, что, обучаясь в одном классе, по одной программе и учебнику, школьники могут усваивать материал на различных уровнях. Указанный вид дифференциации осуществляется при разделении учебного коллектива на группы на основе разных показателей: имеющегося уровня знаний, умений и навыков (уровень успеваемости); уровня интеллектуального развития; интересов, склонностей и способностей; эмоциональных и волевых качеств (в том числе – отношения к учению).

Профильная дифференциация предполагает обучение разных групп старшеклассников по программам, характеризующимися глубиной изложения материала, объемом сведений и даже номенклатурой включенных вопросов, а также профессионально ориентированным содержанием обучения.

Оба вида дифференциации (уровневая и профильная) сосуществуют и взаимно дополняют друг друга на всех ступенях школьного образования. Однако в основной школе ведущим направлением дифференциации является уровневая, а на старшей ступени школы приоритет отдается разнообразным формам профильного изучения предметов. Дифференциация по содержанию проявляется в основной школе через систему кружковых занятий (во всех классах) и факультативов (в VIII-IX классах). Эти формы предназначены для школьников, проявляющих повышенный интерес к математике.

Для рациональной и успешной реализации системы профильного обучения в старшей школе необходима предпрофильная подготовка учащихся основной школы. *Предпрофильная подготовка* – это условное обозначение реализуемого учителем комплекса учебных мероприятий, призванных помочь ученику 9 класса определить ведущую направленность дальнейшего обучения в старшей школе. На ступени основного общего образования предпрофильная подготовка может вестись в двух направлениях: через элективные учебные курсы (ориентационные и пробные) и в рамках базовых учебных дисциплин, в частности – в рамках курса математики.

Предпрофильное обучение математике – это не углубленная математическая подготовка школьников, а развитие их способностей в определенной сфере деятельности средствами математики, демонстрация возможностей применения математики в той или иной профессии. Предпрофильная подготовка в рамках базового курса осуществляется посредством реализации прикладной направленности обучения: рассмотрение задач, содержание которых соответствует различным профилям обучения на старшей ступени.

Прикладные задачи в обучении математике позволяют научить школьников: анализировать ситуации практического характера; распознавать проблемы, которые можно решить математическим методом; понимать математическое содержание информации научно-популярного характера; определять достоверность информации, использовать полученную информацию для принятия решений практического характера.

> *Пример прикладной задачи.* Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т. д. Найдите число бактерий, образующихся из одной бактерии к концу суток.

Профильная дифференциация в организационном аспекте предполагает объединение учащихся в относительно стабильные группы, где учебный процесс идет по образовательным программам, различающимся содержанием, требованиями к уровню школьников – *профильные школы и классы*. Модель общеобразовательного учреждения с профильным обучением на старшей ступени должна включать в себя следующие типы учебных предметов: базовые общеобразовательные, профильные и элективные курсы. Примерное соотношение объемов базовых общеобразовательных, профильных и элективных курсов определяется соотношением 50:30:20.

Базовые общеобразовательные курсы отражают обязательную для всех школьников инвариантную часть образования и направлены на завершение общеобразовательной подготовки обучающихся.

Профильные курсы обеспечивают углубленное изучение отдельных предметов и ориентированы, в первую очередь, на подготовку выпускников школы к последующему профессиональному образованию.

Элективные же курсы связаны с удовлетворением индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей каждого школьника. Они являются важнейшим средством построения индивидуальных образовательных программ. Элективные курсы «компенсируют» во многом достаточно ограниченные возможности базовых и профильных курсов в удовлетворении разнообразных образовательных потребностей старшеклассников.

Математика входит в число обязательных учебных предметов, при этом в подготовке школьника она может иметь разный «удельный вес» как по времени, отводимому на ее изучение, так и по глубине и охвату рассматриваемого материала в зависимости от профиля обучения. В зависимости от той роли, которую математика может играть в образовании человека, выделяют два типа таких курсов.

1) курс общекультурной ориентации (*курс А*), который рассчитан на учащихся, рассматривающих математику только как элемент общего обра-

зования и не предполагающих использовать ее непосредственно в будущей профессиональной деятельности;

2) курсы повышенного типа, обеспечивающие дальнейшее изучение математики и ее применение в качестве элемента профессиональной подготовки:

– *курс B* предназначен для школьников, выбравших для себя те области деятельности, где математика играет роль аппарата, специфического средства для изучения закономерностей окружающего мира;

– *курс C* ориентирован на учащихся, для которых собственно математика является одной из основных целей познания.

Таким образом, *курсы A, B* и *C* призваны предоставить каждому ученику возможность изучать математику на уровне, соответствующем его интересам, способностям, склонностям. Этих курсов в целом достаточно для преподавания математики по профилю любого направления.

Курс A могут выбрать учащиеся, которых интересуют, например, языки, искусство, художественное творчество, спорт или предметно-практическая деятельность. Обязательные требования по усвоению *курса A* фактически должны совпадать с базовым уровнем математической подготовки выпускников средней школы. *Курс A* предназначен для школ (классов) гуманитарного и общеобразовательного профилей.

К примеру, результатом изучения тригонометрических, показательной и логарифмической функций в рамках *курса A* должно стать не столько усвоение способов решения соответствующих уравнений и неравенств, сколько понимание взаимосвязей этих математических знаний с процессами, происходящими в реальном физическом мире и в человеческом обществе. Результатом изучения начал анализа может считаться не умение самостоятельно исследовать придуманные для этого функции, а сформированное искреннее восхищение перед человеческим гением, перед мощью человеческой мысли.

Курс В предназначен для учащихся с научным стилем мышления, выбравших для себя профили естественно-научных и научно-гуманитарных направлений: химический, биологический, географический, исторический, социологический, экономический и др. *Курс В* следует выстраивать с учетом того, что для изучающих его школьников математика является хотя и необходимым, но не самым важным предметом. Он должен обеспечивать овладение конкретными математическими знаниями, позволяющими, в частности, выработать представления о применении математики в выбранной науке, и достаточными для изучения математики в вузе соответствующего профиля.

Курс С – наиболее строгий и полный курс математики – ориентирован на учащихся, выбравших для себя деятельность, непосредственно связанную с математикой, и как следствие – какой-то профиль из группы «математического направления», например физико-математический или информационно-технологический,

Программу по каждому из курсов *А, В* и *С* строят по «модульному принципу». В ней должно быть две части: *инвариантная,* обязательная для изучения всеми, кто выбрал этот курс, и *вариативная,* состоящая из разделов, дополняющих основную часть курса.

На ступени среднего (полного) общего образования могут быть организованы следующие основные *виды элективных учебных курсов* профильного обучения: предметные, репетиционные, межпредметные, надпредметные и прикладные. Анализ опубликованных программ элективных курсов как в методической литературе, так и в сети Интернет показывает, что предлагаемые авторские программы курсов не закрывают все направления образовательной области «Математика». Среди таких направлений оказались: комбинаторика, элементы теории вероятностей, элементы математической логики, способы доказательства, аксиоматика, элементы теории множеств. Большинство курсов ориентированы на алгебраический материал старшей школы (комплексные числа, решение уравнений и неравенств различных типов, уравнения с параметрами, свойства функций и т.п.).

2.17. Дополнительное математическое образование. Структура, цели и формы дополнительного математического образования школьников. Центры дополнительного математического образования. Олимпиады, математические конкурсы. Научно-исследовательская работа школьников.

Дополнительное математическое образование – это образовательный процесс, имеющий свои педагогические технологии, формы и средства их реализации, по программам, дополняющим государственный стандарт средней школы. Дополнительное образование максимально соответствует личностно ориентированному подходу и призвано создавать условия для свободного развития личности, удовлетворения ее потребностей в реализации своих склонностей и способностей, в отличие от базового образования, продолжающего оставаться предметно ориентированным, направленным на освоение школьного стандарта.

В *структуру* дополнительного математического образования могут входить:

- воскресные и заочные математические школы при вузах;
- летние математические школы и лагеря;
- центры дополнительного образования для одаренных школьников;
- системы спецкурсов и факультативов для школьников;
- научно-исследовательская работа со школьниками в рамках подготовки к научно-практическим конференциям;

- математические олимпиады и конкурсы;

- школьные математические кружки;

- подготовительные курсы при вузах и школах;

- научно-популярные музей, фестивали и выставки;

- клубы и сообщества по интересам математической тематики;

- репетиторское образование и др.

Основными *целями* дополнительного математического образования являются:

- углубление и расширение знаний по математике;

- развитие интереса учащихся к математике;

- развитие математических способностей;

- формирование приемов самостоятельных занятий математикой;

- воспитание и развитие инициативы и творчества;

- повышение общего и интеллектуального уровня развития учащихся;

- подготовка к дальнейшему математическому образованию на профильном уровне и др.

Основными *формами* дополнительного математического образования являются очная, дистанционная и заочная. Которые, в свою очередь, могут носить характер индивидуального занятия (репетиторство, тьюторство, менторство и др.), коллективно-группового занятия (лекция, семинар, конференция, олимпиада, экскурсия, игра и др.), индивидуально-коллективной системы занятий (неделя науки, кружок, факультатив, консультация, проектная работа и др.).

В настоящее время функционируют специализированные *центры дополнительного математического образования* школьников. Наиболее крупным из них является Московский центр непрерывного математического образования[4]. Основной целью этого центра является сохранение и раз-

[4]http://www.mccme.ru

витие традиций математического образования, поддержка различных форм внеклассной работы со школьниками, методическая помощь руководителям кружков и преподавателям классов с углубленным изучением математики, поддержка различных программ в области преподавания математики в средней и высшей школе, научной работы. Центр является некоммерческой организацией, обучение школьников и студентов, которое проводят различные организации в рамках программ Центра, является бесплатным для учащихся. Подобные центры действуют практически в каждом федеральном округе и при крупных университетах.

В последнее время все большую популярность набирают такие формы дополнительного математического образования как математические олимпиады и конкурсы. Их деятельность регулируется Российским советом олимпиад школьников[5] и Министерством образования и науки РФ. Благодаря проведению первых этапов этих мероприятий с привлечением интернет-технологий они становятся все более массовыми.

Наиболее значимым математическим соревнованием школьников является Всероссийская математическая олимпиада школьников. Она проходит в пять этапов: школьный, районный/городской, областной, зональный, всероссийский. По результатам заключительного тура формируется команда, представляющая Россию на Международной математической олимпиаде.

Широко известны такие математические олимпиады как «Турнир городов»[6], «Турнир имени М.В. Ломоносова»[7], «Высшая проба»[8], «Покори Воробьевы горы»[9], «Физтех»[10], «Объединенная межвузовская математиче-

[5] http://www.rsr-olymp.ru
[6] http://www.turgor.ru
[7] http://www.turlom.olimpiada.ru
[8] http://www.olymp.hse.ru/mmo
[9] https://www.pvg.mk.ru
[10] https://www.mipt.ru/abiturs/olympiads/fizteh

ская олимпиада» и др. Победа в этих олимпиадах высоко ценится и приравнивается при поступлении в вузы к максимальному баллу по ЕГЭ по профильному предмету «математика».

Если перечисленные выше олимпиады нацелены на учащихся в основном 8-11 классов, то для учащихся младшего возраста существует большое количество разнообразных математических конкурсов. Наиболее массовыми из них являются Международный математический конкурс «Кенгуру»[11], Международное математическое соревнование «GeniusLogicus»[12], «Турнир Архимеда»[13], «Математический праздник»[14], «Московская математическая регата»[15] и др.

Под научно-исследовательской работой школьников понимают одну из форм самостоятельной работы учащихся по получению знаний. Для осуществления подобной работы от учащегося требуется определенный уровень логического мышления и широкий кругозор в области математики. Часто научно-исследовательская работа учащихся проводится учителем, либо приглашенным вузовским преподавателем в рамках специально организованного научного математического общества учащихся. Основными принципами организации научно-исследовательской работы школьников в подобных обществах являются:

- добровольность и заинтересованность учащихся;
- демократизм в работе научного общества;
- систематичность работы;
- публичная отчетность о полученных результатах;
- поощрение учеников по итогам работы;

[11] http://www.mathkang.ru
[12] http://www.geniuslogicus.eu/ru/
[13] http://www.arhimedes.org
[14] http://www.olympiads.mccme.ru/matprazdnik
[15] http://www.olympiads.mccme.ru/regata

- участие в разнообразных математических конкурсах, конференциях, выставках.

Тематика научно-исследовательской работы учащихся связана с возможностями учеников, интересами научного руководителя, потребностями учебного процесса[16]. В первом приближении можно выделить четыре основных вида научно-исследовательских работ учащихся:

- информационно-реферативные (исследовательские работы, написанные на основе нескольких литературных источников с целью наиболее полного освещения какой-либо математической проблемы, метода или идеи; к работам этого вида можно отнести, например, работы историко-математической тематики);

- экспериментально-практические (работы, описывающие научный эксперимент или результаты практической работы; например: а) решение задачи на измерение площадей поверхности и объемов тел вращения многогранников, б) статистической обработки проведенного социального, экономического или экологического исследования и т.п.);

- поисково-реферативные (работы, предполагающие тщательное изучение основных положений какой-либо математической теории/метода/идеи на основе нескольких научно-популярных и научных источников и последующее выполнение некоторой самостоятельной математической деятельности: доказательство следствия теоремы; построение примера, иллюстрирующего теорему; обоснование метода доказательства; доказательство обобщения теоремы; построение контрпримера, показывающего важность того или иного условия теоремы и т.п.);

- проблемно-исследовательские (работы, содержащие действительно новую, ранее не рассмотренную проблему либо новый математический

[16]Хорошим подспорьем для учителя математики, начинающего научно-исследовательскую работу со школьниками может стать пособие: ***Сгибнев А.И***. Исследовательские задачи для начинающих. – М.; МЦНМО, 2013.

объект, предлагающие свой способ доказательства известного или нового результата).

Научно-исследовательская работа учащегося обычно включает в себя следующие этапы:

1. Ознакомление с тематикой работ, предлагаемой руководителем, и выбор темы в соответствии со своим интересом (возможна и самостоятельная формулировка темы исследования учащимся).

2. Обсуждение выбранной темы с научным руководителем, согласование списка литературы, необходимой для изучения темы.

3. Формулировка цели и задач работы.

4. Изучение и обработка литературных источников.

5. Выполнение исследовательской части работы на основе изученного теоретического материала.

6. Тщательный отбор материала, необходимого для изложения темы исследования. Оформление работы.

7. Подготовка сообщения (10-15 минут) по итогам выполненной работы.

2.18. Внеклассная работа по математике. Понятие внеклассной работы по математике как одного из видов дополнительного математического образования. Виды и формы внеклассной работы по математике. Характеристика одной из форм внеклассной работы по математике (на выбор).

Внеклассная работа, как часть дополнительного образования школьников, ставит перед собой задачи повышения общего уровня развития учащихся, подготовки школьников к дальнейшему образования и самообразования и к практической творческой деятельности по любой специальности.

Напомним, что дополнительное математическое образование школьников (ДМОШ) – это образовательный процесс, имеющий свои педагогические технологии, формы и средства их реализации, по программам, дополняющим федеральный государственный стандарт средней школы. ДМОШ тесно связан с внеклассной работой по математике, и они вместе входят в состав непрерывного математического образования.

Под внеклассной работой по математике понимаются необязательные систематические занятия учащихся с преподавателем во внеурочное время.

Следует различать *два вида* внеклассной работы по математике:

– работа с учащимися, отстающими от других в изучении программного материала (дополнительные внеклассные занятия);

– работа с учащимися, проявляющими к изучению математики повышенный, по сравнению с другими, интерес и способности.

Основной целью *первого вида* работы является своевременная ликвидация и предупреждение имеющихся у учащихся пробелов в знаниях и умениях по курсу математики.

При работе с отстающими эффективным является соблюдение следующих положений:

– дополнительные занятия по математике целесообразно проводить с небольшими, достаточно однородными (с точки зрения пробелов в знаниях и способностей к обучаемости) группами отстающих (3-4 человека в группе);

– следует максимально индивидуализировать эти занятия;

– целесообразно проводить такие занятия не чаще одного раза в неделю в сочетании с домашней работой по индивидуальному плану;

– после повторного изучения темы на дополнительных занятиях следует провести итоговый контроль с выставлением оценки по теме;

– дополнительные занятия должны иметь обучающий характер;

– учителю математики необходимо анализировать причины отставания учащихся при изучении ими математики.

Второе направление отвечает следующим целям:

1. Пробуждение и развитие устойчивого интереса учащихся к математике и ее приложениям.

2. Расширение и углубление знаний учащихся по программному материалу.

3. Оптимальное развитие математических способностей у учащихся и привитие им навыков исследовательской деятельности.

4. Воспитание культуры математического мышления.

5. Развитие умения самостоятельно и творчески работать с учебной и научно-популярной литературой.

6. Расширение и углубление представлений учащихся о практическом значении математики.

7. Расширение представлений учащихся о культурно-исторической ценности математики, о ведущей роли российской математической школы в мировой науке.

8. Воспитание у учащихся чувства коллективизма и умения сочетать индивидуальную работу с коллективной.

9. Установление более тесных деловых контактов между учителем математики и учащимися и на этой основе более глубокое изучение познавательных интересов и запросов школьников.

10. Создание актива, способного оказать учителю математики помощь в организации эффективного обучении математике всего коллектива данного класса.

Выделяют следующие *формы* внеклассной работы с учащимися, интересующимися математикой:

– математические кружки;

- математические викторины, конкурсы, олимпиады;
- математические вечера;
- математические экскурсии;
- внеклассное чтение математической литературы;
- математические рефераты и сочинения;
- математические игры и развлечения;
- школьная математическая печать;
- «математическая неделя».

Математический кружок – систематически проводимые занятия с периодичностью примерно раз в неделю. В основе кружковой работы лежит принцип строгой добровольности. При организации математического кружка целесообразно предварительно провести индивидуальные беседы с учащимися с целью выявления интересов и потребностей школьников, перед первым заседанием кружка разместить красочно оформленное объявление.

На первом, организационном занятии кружка учитель сообщает план работы кружка, составляет первоначальный список членов кружка, выбираются староста и редколлегия. Первое сообщение делает сам учитель, передавая новую, интересную информацию, являя своим выступлением образец доклада для учащихся.

На остальных занятиях кружка в целях предупреждения утомления учащихся следует чередовать формы работы с учащимися. В конце занятия необходимо сообщить тему следующего заседания и распределить поручения к нему. На занятиях должна создаваться атмосфера свободного обмена мнениями, активной дискуссии.

Математические олимпиады – наиболее массовая форма внеклассной работы по математике. Цели их проведения весьма многообразны: расширение кругозора учащихся; развитие интереса учащихся к изучению математики; общий подъем математической культуры, интеллектуального уровня учащихся; выявление учащихся, проявивших себя по математике, для участия их в следующем туре олимпиад и для организации индивидуальной работы с ними; знакомство учащихся с важнейшими проблемами и методами современной математики.

Различают олимпиады следующих видов: традиционные, городские, районные, многоуровневые, нестандартные, заочные, олимпиады среди будущих абитуриентов вузов и др.

Традиционные школьные математические олимпиады проводятся для каждой параллели классов и проводятся в несколько туров. Сначала можно провести внутриклассную олимпиаду, затем внутришкольную. В оргкомитет олимпиады, как правило, входят: заместитель директора, председатель школьного методического объединения учителей математики, учителя математики и представители старшеклассников. Для составления, проверки и оценки работ участников олимпиады создается жюри, членами которого могут быть учителя математики и преподаватели вузов, работающие в данной школе, студенты, проходящие практику в данной школе и старшеклассники (для проведения олимпиад в младших классах).

В обязанности членов оргкомитета входит подготовка текстов олимпиады, разработка положения о проведении олимпиады, о поощрении победителей, подготовка помещения для проведения олимпиад, подготовка объявления и т.д.

Нетрадиционные формы математических олимпиад содержат наряду с решением задач элемент игры, соревнования, например: конкурс тяжеловесов, математическая эстафета, математическая лапта, математический хоккей, математический лабиринт и др.

Олимпиады по математике *для абитуриентов вузов* проводятся многими вузами ежегодно во втором полугодии и имеют следующие цели: отбор наиболее одаренных учащихся среди старшеклассников, предоставление возможности каждому учащемуся проверить свои силы перед предстоящими экзаменами, ЕГЭ, вступительными экзаменами. Для победителей устанавливают льготы при поступлении: внеконкурсное поступление или выставление отличной отметки на вступительном экзамене по математике. Тексты олимпиад в каждом вузе имеют свои особенности.

Многоуровневые олимпиады проводятся для диагностики различных видов интеллектуальной одаренности учащихся по математике и проводятся в три этапа с перерывами между ними 10-15 минут. На первом проверяется скорость решения школьных задач. Проверяется быстрота, гибкость мышления при решении прямой и обратной задач, умение находить несколько способов решения. На втором этапе предлагаются чисто олимпиадные задачи, использующие различные идеи, методы. На третьем этапе предлагается творческая задача для диагностики исследовательских умений учащихся.

Математические викторины – одна из наиболее легко организуемых форм внеклассной работы по математике. Принимают участие в ней все желающие. Для проведения викторины подбираются упражнения, при решении которых учащиеся должны проявить свою находчивость, смекалку, математические способности. Подбираемые упражнения, как правило, решаются устно, они различной трудности. Число заданий для викторины может быть 10-20, а продолжительность мероприятия не более 25-30 минут.

Если проведение викторины не отнесено к определенному времени, то материалы можно разместить в математической стенгазете для всех желающих. Письменные решения сдаются учителю, оцениваются жюри.

Математические вечера – художественные, занимательные, познавательные мероприятия. Основная их цель: повышение интереса к математике, вовлечение обучающихся в самостоятельную математическую деятельность. Как правило, математические вечера проводятся раз в год.

Подготовка вечера должна начаться заранее, за 1-2 месяца до его проведения. Для этого создается оргкомитет, состоящий из учителя математики и 4-5 учеников. Ими разрабатывается план подготовки и проведения вечера. За несколько дней до проведения вывешивается красочное объявление о месте, дате и времени проведения вечера.

Программа вечера должна быть разнообразной и включать, например, рассказы, сообщения, доклады, инсценировки, стихи, софизмы, фокусы, игры, викторину. Вести вечер лучше учителю или студенту-практиканту, но можно и учащимся. В случае проведения вечера в форме КВН, необходимо создание жюри, включающее как учителей, так и старшеклассников. Продолжительность вечера не должна превышать 2-3 часов.

Математическая неделя является одной из самых распространенных форм внеклассной работы. Целями её проведения являются повышение интереса учащихся к математике, выявление наиболее способных учащихся по математике.

Для подготовки мероприятия необходимо создание совета учителей математики школы, представителей из математических кружков. Данный совет обсуждает содержание недели математики, распределяет обязанности между классами. В план проведения могут входить викторины, конкурсы, олимпиады, бои, КВН, вечер и т.п. За несколько дней до мероприятия вывешивается утвержденный и красочно оформленный план математической недели. Итоги проведения мероприятий, к примеру, выставки творческих работ, общественного смотра знаний, оцениваются жюри. Победители награждаются призами и грамотами.

2.19. Средства обучения математике. Печатные средства обучения математике и их электронные версии. Современные средства обучения математике. Технологическая схема планирования применения средств обучения на уроке математики.

Средства обучения математике – обязательный элемент оснащения процесса обучения математике, являются предметной поддержкой учебного процесса и предназначены для его организации и осуществления. Они представляют собой материальные и идеальные объекты, которые вовлекаются в образовательный процесс в качестве носителей информации и инструмента деятельности. Средства обучения помогают раскрывать содержание и объем новых понятий; формировать необходимые знания и умения; дифференцировать работу учащихся с учетом их индивидуальных способностей и уровня математической подготовки; обеспечивать эффективную организацию самостоятельной работы учащихся; оперативно осуществлять контроль и самоконтроль. К дидактическими функциями средств обучения, относятся также: передача учебной информации; учет психологических особенностей учащихся; уменьшение затрат времени; визуализация информации и др.

Программа по математике предполагает оснащение процесса обучения печатными пособиями, а также информационно-коммуникативными средствами, экранно-звуковыми пособиями, техническими средствами обучения, учебно-практическим и учебно-лабораторным оборудованием.

К *печатным средствам* обучения математике относятся: нормативные документы и Стандарт по математике; примерные программы; комплекты учебников, рекомендованных или допущенных Министерством образования и науки РФ; рабочие тетради; дидактические материалы; сборники контрольных и самостоятельных работ; практикумы по решению задач, соответствующие используемым комплектам учебников; сборники заданий, обеспечивающих диагностику и контроль качества обучения в соответствии с требованиями к уровню подготовки выпускников, закрепленными в Стандарте по математике; пособия для подготовки и/или проведения государственной аттестации по математике за курс основной школы; учебные пособия по элективным курсам; научная, научно-популярная, историко-математическая литература; справочные пособия (энциклопедии, словари, справочники по математике); учебная литература, необходимая для подготовки докладов, сообщений, рефератов, творческих работ учащихся (в том числе, методико-математическая периодика для учителя и учащихся).

К печатным средствам обучения математике относятся также таблицы[17] по математике/алгебре/геометрии, в которых представлены правила действий с числами, таблицы метрических мер, основные сведения о плоских и пространственных геометрических фигурах, основные математические формулы, соотношения, законы, графики функций; портреты выдающихся математиков.

Целесообразно иметь в наличии *информационные средства обучения* — мультимедийные обучающие программы и электронные учебные издания, ориентированные на систему дистанционного обучения либо имеющие проблемно-тематический характер и обеспечивающие дополнительные условия для изучения отдельных тем и разделов школьного курса математики. Эти пособия должны предоставлять техническую возможность построения системы текущего и итогового контроля уровня подготовки учащихся (в том числе в форме тестового контроля). Инструментальная среда должна предоставлять возможность построения и исследования геометрических чертежей, графиков функций, проведения числовых и вероятностно-статистических экспериментов, построение и оперирование 3D-

[17]Настенные таблицы по математике используются для решения различных дидактических задач, но основная их особенность - возможность размещения на стенах классной комнаты на длительное время. Многократное их использование обеспечивает более глубокое запоминание содержащегося в них материала, с одной стороны, и дает возможность быстро навести необходимую справку - с другой.

моделями изучаемых стереометрических объектов. К информационным средствам обучения относятся также компьютерные презентации и flash-анимации, подготовленные к уроку самим учителем или учащимися. Полезно иметь также видеофильмы по истории развития математики, математических идей и методов.

Для эффективного использования информационных средств обучения необходимы специальные *технические средства обучения*. К последним, относятся: мультимедийный компьютер, мультимедиа проектор, экран (на штативе или навесной), интерактивная доска.

Программой по математике предполагается также и наличие традиционных учебно-лабораторных средств обучения, к которым относятся: доска магнитная с координатной сеткой; комплект чертежных инструментов (классных и раздаточных): линейка, транспортир, угольник (30°, 60°, 90°), угольник (45°, 90°), циркуль; комплекты планиметрических и стереометрических тел (демонстрационных и раздаточных); комплект для моделирования (цветная бумага, картон, калька, клей, ножницы, пластилин) и др. Роль этих средств обучения для формирования практических математических навыков трудно переоценить. Они оказывают существенное влияние на математическое развитие учащихся с ведущим визуальным и кинестетическим каналом восприятия информации. Заметим, что геометрические модели различной природы (прозрачные стеклянные, каркасные, нитевидные, деревянные) обладают различной степенью наглядности. Большой мотивационный потенциал для развития интереса к математике имеют различные геометрические головоломки, которые желательно иметь в кабинете математики.

Широкое применение современных образовательных информационно-компьютерных технологий (ИКТ), требует наличия соответствующих средств обучения как материальных (индивидуальные планшетные компьютеры, ученические пульты для интерактивной доски, сетевое оборудование для обеспечения устойчивой интернет-связи, школьный сервер для создания широкого, постоянного и устойчивого доступа всех участников образовательного процесса к любой информации, связанной с реализацией основной образовательной программы, достижением планируемых результатов, организацией образовательного процесса и условиями его осуществления и др.), так и идеальных (специализированные электронные образовательные ресурсы (ЭОР); школьный сайт; персональные предметные сайты учителей и индивидуальные виртуальные кабинеты учащихся; электронные каталоги и полнотекстовые базы данных, обеспечивающие поиск документов по любому критерию и доступ к учебным материалам и образовательным ресурсам интернета).

Заметим, что согласно требованиям ФГОС с 2015/16 учебного года все печатные учебники математики будут иметь в качестве своей обязательной составляющей и электронные приложения, которые должны не только полностью дублировать содержание печатного учебника, но и дополнять его интерактивным и мультимедийным контентом.

Материал из электронного учебника учитель может дополнить, скорректировать, отослать ученику по электронной почте, разместить в сети интернет для одновременного доступа к нему учеников (например, средствами docs.google.com). Электронный учебник обеспечивает режим самообучения, широкие возможности самоконтроля. Включение в электронный учебник элементов анимации и компьютерных игр усиливают его интерактивность и привлекательность для учащихся. Гипертекстовая структура учебника позволяет осуществлять индивидуальную траекторию обучения. Учащиеся могут самостоятельно пополнять электронный учебник своими творческими работами, при необходимости открывая их для общего доступа и собрать электронное портфолио своих учебных достижений (пройденные тесты, самостоятельные и контрольные работы, творческие задания и др.), создавая тем самым личностное содержание образования.

Независимо от вида средства обучения, учителю может быть предложена следующая технологическая схема для планирования их использования на уроке математики:

1) проанализировать цели урока, его содержание и логику изучения материала;

2) выделить главные элементы, которые должны быть усвоены учащимися и нуждаются в демонстрации (факты, гипотезы, методы);

3) установить, на каком этапе и для какой цели необходимо использование средств обучения;

4) отобрать оптимальные средства обучения, установить их соответствие целям урока;

5) определить методы и приемы, с помощью которых будет обеспечена познавательная деятельность учащихся;

6) отразить использование выбранных средств и методики работы с ними в конспекте урока.

2.20. Педагогические технологии в обучении математике. Подходы к определению, классификации. Характеристические особенности некоторых технологий. Примеры использования (на выбор).

В социальную сферу термин «технология» пришел из производственных процессов, где технология понимается как совокупность приемов, применяемых в каком-либо деле, мастерстве. По сути дела, этим термином обозначается алгоритм создания того или иного изделия с заданными параметрами. Четкое соблюдение алгоритма гарантирует достижение поставленной цели.

Специфика педагогической науки и методики вносит свои коррективы в толкование данного термина. Существует несколько трактовок понятия «педагогическая технология». Приведем некоторые из них:

- системный метод создания, применения и определения всего процесса преподавания и усвоения знаний с целью оптимизации форм образования (ЮНЕСКО);
- описание процесса достижения планируемых результатов обучения (И.П. Волков);
- систематичное и последовательное воплощение на практике заранее спланированного учебно-воспитательного процесса (В.П. Беспалько).

Таким образом, педагогическая технология функционирует и в качестве науки, исследующей наиболее рациональные пути обучения, и в качестве системы способов, принципов и регулятивов, применяемых в обучении, и в качестве реального процесса обучения.

Классификация педагогических технологий обширна и имеет различные основания. Рассмотрим основные виды:

По типу организации и управления: классно-урочная; технологии группового, дифференцированного и программированного обучения.

По способам, методам и средствам обучения: репродуктивные, объяснительно-иллюстративные, технологии программированного, проблемного, развивающего обучения, игровые, коммуникативные, диалогические, творческие.

По внесению модернизаций:

На основе активизации и интенсификации деятельности: игровые, технология В.Ф. Шаталова, проблемное обучение.

На основе эффективности организации и управления: программированное, дифференцированное обучение, групповые, компьютерные технологии.

На основе методического усовершенствования материала: технология укрупнения дидактических единиц П.М. Эрдниева (УДЕ).

Частнопредметные технологии: Р.Г. Хазанкин, А.А. Окунев.

Дадим краткую характеристику некоторых авторских технологий обучения математике.

<u>Технология использования опорных конспектов В.Ф. Шаталова</u>. Опорные сигналы – комбинации буквенных, цифровых, текстовых, графических и других символов различных цветов и размеров. Они компонуются в блоки, из которых составляется опорный конспект: набор ключевых слов, знаков и других опор для мысли. Благодаря использованию опорных конспектов сокращается время, отводимое на изучение теории, и увеличивается время, затрачиваемое на решение задач.

Методика работы с опорным конспектом на уроке.

1-й вариант: вся тема излагается на одном уроке.

1. Опорный конспект создается учителем в ходе объяснения нового материала на доске.

2. Повторный пересказ учителем нового материала по опорному конспекту.

3. Фиксирование опорных конспектов в тетрадях учащихся.

4. Чтение текста учебника, установление взаимосвязей текста и опорного конспекта.

5. Воспроизведение опор по памяти на листочках с самопроверкой.

6. Готовиться к уроку дома рекомендуется следующим образом: в день объяснения нового материала раскрасить лист с опорными сигналами по образцу; прочитать указанные в листе пункты учебника; воспроизвести по памяти опорный конспект. Если все выполнено безукоризненно, приступить к решению упражнений; при наличии даже очень небольшой ошибки, описки, неточности работу необходимо выполнить еще раз.

7. На следующий день необходимо снова воспроизвести весь опорный конспект, повторить основные правила, определения, выводы.

8. На уроке в течение первых 12 минут урока осуществляется воспроизведение опорного конспекта всеми учащимися; затем проводятся опросы: тихий, магнитофонный, парный взаимоопрос, полетное повторение и др.

2-й вариант: тема излагается традиционно. На каждом уроке появляется часть опорного конспекта, на обобщающем уроке темы – целиком.

Несмотря на явные преимущества данной технологии в формировании высокого качества знаний, в ней превалирует жесткая методическая рецептура, ориентирующая на подражание. Достаточно жесткие требования предъявляются к родителям.

Технология укрупнения дидактических единиц П.М. Эрдниева (УДЕ).

Укрупненная дидактическая единица – это элемент учебного процесса, состоящий из логически различных элементов, обладающих в то же время информационной общностью.

Основным акцентом урока, построенного по системе укрупнения дидактических единиц, служит правило: преобразование выполненного задания, осуществляемое немедленно на этом уроке. Прямая задача или теорема постигается через обратную; умножение – через деление; решение задачи – через её составление; тождество – через уравнение и т.п.

Технологические приемы УДЕ:

✓ *Совместное и одновременное* изучение взаимосвязанных понятий и операций.

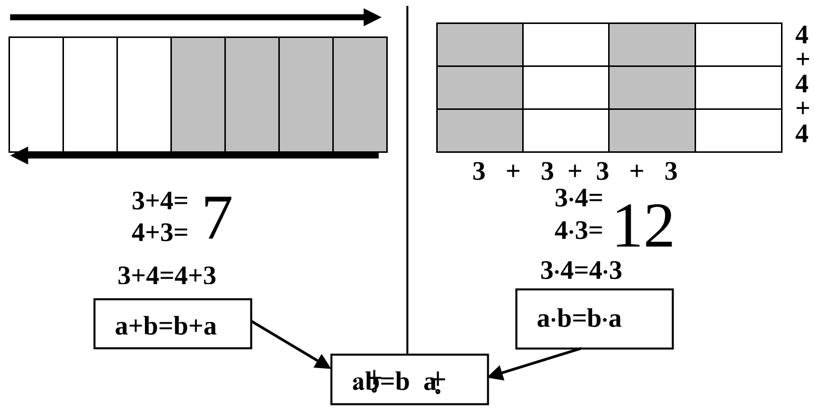
✓ *Обращение* задач, теорем, функций и сравнение соответствующих суждений в процессе выполнения упражнений.

✓ Решение *деформированных* примеров совместно с определенными заданиями, например: $(\Diamond - 2b)(\Diamond + 2b) = 9a^2 - *$

✓ *Составление* упражнений, аналогичных решенным.

✓ Использование в системе упражнений противоположных кодовых переходов мысли (от рисунка к слову и наоборот) – *визуализация знаний*.

Переместительные законы сложения и умножения



✓ *Параллельная* запись сравниваемых правил (задач, преобразований), в частности, двойственных суждений.

✓ «*Двухэтажная*» запись некоторых аналогичных высказываний – использование свернутых форм умозаключений, например:

Сумма квадратов $\frac{\text{сторон параллелограмма}}{\text{ребер параллелепипеда}}$ равна сумме квадратов его диагоналей.

$\frac{\textit{Сумма}}{\textit{Произведение}}$ не изменяется от перестановки мест $\frac{\text{слагаемых}}{\text{сомножителей}}$.

Данная технология редко используется при объяснении нового материала по стандартным учебникам. Однако при повторении может применяться каждым учителем.

<u>Педагогическая технология на основе системы эффективных уроков А. А. Окунева</u>

В основе системы уроков А.А. Окунева лежит принцип интереса, пробуждаемого новизной материала, интригой.

Система эффективных уроков А.А. Окунева состоит из следующих видов: урок припоминания материала; урок поиска рациональных решений; урок проверки результатов сопоставлением с данными; урок одной задачи; урок самостоятельной творческой работы; урок самостоятельной работы по материалу, который не объясняли; урок возвращения к ранее изученному под другим углом зрения; урок-бенефис; лабораторные работы; устная контрольная работа; урок-зачет.

Требования к учителю: воспитывать веру в свои силы у ученика, воспитывать стремление к самостоятельности, организовывать эмоционально яркий урок, варьировать методы, создавать психологический комфорт, импровизировать.

Методика построения обучения в системе эффективных уроков

1. Излагается вся теория с применением лекции, поисково-исследовательских методов.
2. Рассматривается ряд типичных задач, изучаются алгоритмы их решения.
3. Выписываются основные задачи, из которых складывается решение творческих задач.
4. Несколько уроков посвящается решению задач: от вопросов, заставляющих вникнуть в суть каждой детали изучаемой темы, до творческих задач.
5. После нескольких самостоятельных работ проводится зачет.

Оглавление

Учебное издание

Серия «Поступающим в магистратуру»

Полякова Татьяна Сергеевна
Бреус Ирина Анатольевна
Князева Лариса Евгеньевна
Михайлова Ирина Алексеевна
Пырков Вячеслав Евгеньевич

МАГИСТЕРСКАЯ ПРОГРАММА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

Учебное пособие

Подписано в печать 08.04.2015 г. Заказ № 4370.
Тираж 100 экз. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Печ. лист 7,09. Уч.изд.л. 4,76.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел. (863) 247-80-51.